

## MP 32 : Couplage des oscillateurs

Aurélien Ricard (binôme 05 avec Rémy Lienard)

Correcteur : Arnaud Le Diffon

Coupler des oscillateurs est une idée assez transversale en physique, et nous allons l'illustrer au travers de trois expériences. L'idée générale de ce montage et d'observer l'apparition de nouvelles fréquences propres différentes de celles des oscillateurs isolés. Commençons par expliquer le phénomène le plus simplement possible.

### Quand tu cherches les modes propres d'un système linéaire



Figure 1

## 1 Pendules pesants couplés

Le dispositif expérimental se trouve dans les stocks, il ressemble à la figure 2

Figure 2: Expérience des pendules couplés

On couple deux pendules pesants par un fil de torsion qui est relié aux armatures de chaque pendule (la torsion se fait par les deux attaches extérieures, et pas directement entre les vis serrées au milieu).

## 1.1 Mesures préalables (faites en préparation, non présentées)

Il faut tout d'abord caractériser le moment d'inertie de chaque pendule (on en a besoin par la suite). On desserre le fil, donc on annule le couplage, et on étudie leurs oscillations libres indépendantes.

Première étape : s'affranchir du moment du poids du pendule sans masse. On enlève la masse, et on s'assure qu'à un angle quelconque, le pendule lâché sans vitesse initiale ne bouge pas. Il est alors équilibré. On peut ensuite ajouter les masses.

Deuxième étape : on mesure la période d'oscillations de chaque pendule. Pour la mesure de la période, on utilise le boîtier gris qui permet de relier le potentiomètre (mesure d'angle) à l'oscilloscope, et on fait une mesure de période par la méthode de votre choix.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (1)$$

Avec  $l$  la distance entre l'axe et la masse ajoutée,  $J$  le moment d'inertie total, ie celui du pendule vide plus celui de la masse. On vérifie que les intervalles de confiance se recourent pour les deux pendules, on peut alors les considérer identiques.

Mesures expérimentales :  $T_{01} = (1.619 \pm 0.003)s$  et  $T_{02} = (1.617 \pm 0.003)s$

## 1.2 Caractérisation du couplage

On visse le fil de torsion, et on impose un angle nul en tenant un des deux pendules à la verticale. On mesure de même que précédemment la période d'oscillations libres du deuxième pendule, qui est modifiée par le couple de torsion maintenant appliqué :

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C + mlg}} \quad (2)$$

Avec  $C$  la constante de torsion. On le fait pour un seul pendule puisque les deux sont identiques. On en déduit  $C$ .

Mesures expérimentales :  $(T'_0 = 1.559 \pm 0.003)s$ .

## 1.3 Oscillations libres des pendules couplés

Lorsqu'on regarde les oscillations libres de ce système, on s'aperçoit qu'en plus de la fréquence propre d'un pendule, il apparaît une nouvelle fréquence propre, plus grande.

Manip : On lâche un des deux pendules à un angle non nul, on observe l'angle en fonction du temps sur l'oscillo, et par TF ou par mesure de période de battements, on trouve les deux fréquences

propres du système. Avec les valeurs expérimentales de périodes, les fréquences propres auxquelles on s'attend sont, avec les expressions théoriques :

$$f_S = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m l g}{J}}; AN : f_S = (618 \pm 4) mHz \quad (3)$$

$$f_{AS} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m l g + 2C}{J}}; AN : f_{AS} = (666 \pm 4) mHz \quad (4)$$

En fait, on envoie toutes les fréquences dans le système via des conditions initiales, et on regarde la réponse. C'est un peu comme étudier une réponse impulsionnelle, mais sans avoir à mettre une baffe aux pendules, qui sont plus durs que nos mains.

On trouve des valeurs proches, qui ne recourent pas les intervalles de confiance. On peut expliquer ça à cause de la différence entre les masses mises aux bout de chaque pendule (10g d'écart), chaque fois que vous voyez un  $J$  dans les formules, c'est une moyenne...

On peut montrer la signification de ces deux fréquences propres, qui correspondent aux modes symétriques et anti-symétriques. Donc si on lâche les deux pendules au même angle, on n'excite que le mode symétrique, et les pendules restent en phase, et si on les lâche à des angles opposés, ils restent en opposition de phase. Dans chacun de ces deux cas, on peut mesurer une fréquence des oscillations, qui est unique, et retrouver  $f_S$  et  $f_{AS}$ .

On vient de coupler deux oscillateurs mécaniques. En fait, c'est quelque chose d'assez général, si on couple deux oscillateurs identiques de façon linéaire, on obtient deux fréquences propres, dont une qui est celle d'un oscillateur indépendant. Par exemple, on peut coupler deux oscillateurs électroniques aussi!

## 2 Couplage capacitif

### 2.1 Système étudié

On couple deux filtres LC par une capacité en parallèle  $\Gamma$  que l'on fera varier expérimentalement (voir figure 3). Les deux filtres sont pris égaux, d'inductances  $L = 44mH$  et de capacités  $C = 190nF$ . Encore une fois, c'est faux en pratique, mais on le prend pour acquis dans toute la suite.

Comme je n'ai trouvé le calcul de la fonction de transfert nulle part, je vous le mets ici, c'est du

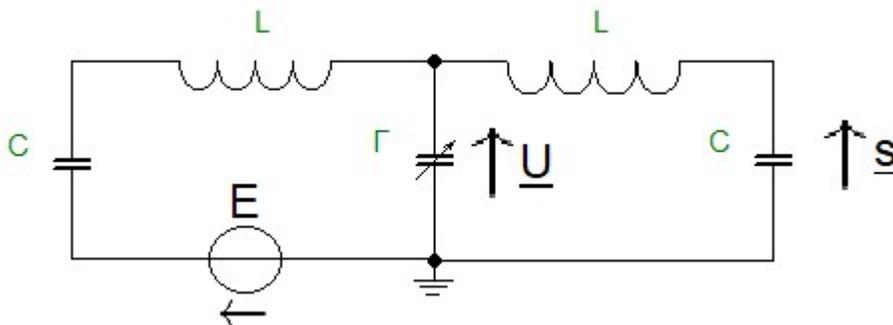


Figure 3: Schémas du montage

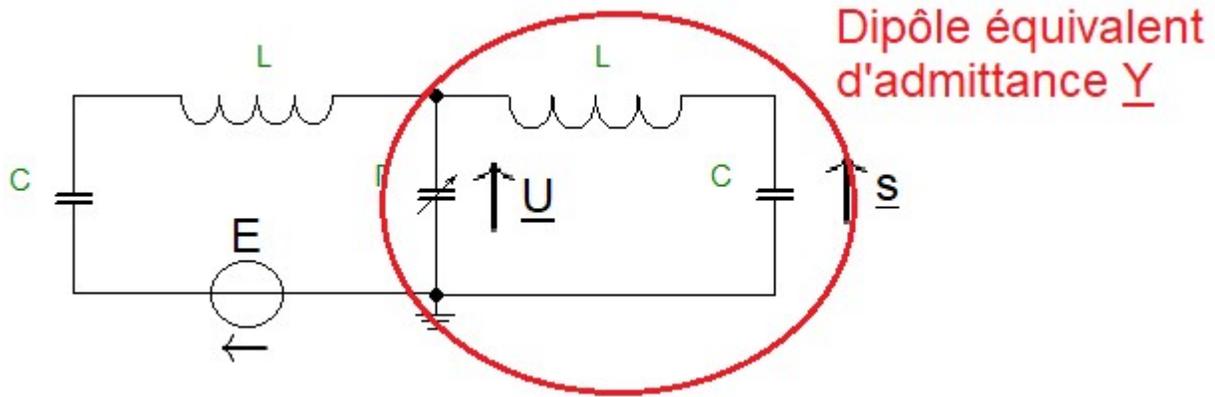


Figure 4: Dipôle équivalent

fait maison. En notation complexe, diviseur de tension :

$$\underline{s}(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{U}(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC} \underline{u}(\omega) \quad (5)$$

On peut exprimer un dipôle équivalent (figure 4):

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z_\Gamma} + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad (6)$$

On le met sous une forme plus jolie :

$$\underline{Y} = \frac{j\Gamma\omega(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + 1)}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

On multiplie par  $jC\omega$ :

$$\underline{Y} = \frac{jC\omega - \Gamma C\omega^2(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega)}{1 - LC\omega^2}$$

Et on arrange la parenthèse du numérateur :

$$\underline{Y} = \frac{jC\omega + j\Gamma\omega(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2}$$

Avec un diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{U} = \frac{\frac{1}{\underline{Y}}}{\frac{1}{\underline{Y}} + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \underline{E}$$

On peut donc écrire la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{\underline{Y}}}{\frac{1}{\underline{Y}} + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} \quad (7)$$

Avec :

$$\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Y}(\underline{Z}_C + \underline{Z}_L)} = \frac{1}{j\Gamma\omega(1 - LC\omega^2) + jC\omega}$$

D'où en reprenant l'équation (7), on obtient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{j\Gamma\omega(1-LC\omega^2)+jC\omega}}{\frac{1-LC\omega^2}{j\Gamma\omega(1-LC\omega^2)+jC\omega} + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Qui devient en multipliant par l'inverse du numérateur :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 - L\Gamma\omega^2(1 - LC\omega^2) + \frac{\Gamma}{C}(1 - LC\omega^2) + 1 - LC\omega^2}$$

Qui en factorisant par  $1 - LC\omega^2$  donne enfin (au secours c'est long je ne supporte pas ça) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{(1 - LC\omega^2)(2 - \omega^2L\Gamma + \frac{\Gamma}{C})}$$

Deux choses sont à noter, outre le fait qu'on se demande si c'est vraiment un compte rendu de montage ou une torture électrocinétique d'un méchant exo de colle de sup inventé par un tortionnaire sadique :

1. On trouve deux pulsations de résonance, une qui est la pulsation propre d'un des deux filtres :  $\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , et l'autre qui est la pulsation antisymétrique :  $\omega_{AS} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{L\Gamma}}$
2. Il n'y a pas de terme dissipatif pris en compte dans le modèle, donc les résonances sont infinies. En fait, il y a des résistances internes aux dipôles électriques en pratique, notamment sur les bobines qui sont faites d'un enroulement de cuivre, qui est résistif.

## 2.2 Expérience

Avec la macro Igor, on peut envoyer une impulsion et déterminer les deux fréquences caractéristiques, tracer  $f_{AS}^2(\frac{1}{\Gamma})$  pour vérifier que c'est une droite, d'ordonnée à l'origine  $f_S^2$  qui est calculable. On fait donc ici la réponse impulsionnelle, qui est possible dans ce cas car Igor s'occupe d'envoyer la baffe au système, et on regarde sa réponse.<sup>1</sup>

En pratique, vous avez plusieurs possibilités pour réaliser le montage : vous pouvez utiliser le boîtier prévu à cet effet, mais les résultats étaient très peu convaincants, il y a sûrement des capacités parasites. Je vous conseille donc de faire le circuit sur plaque verte, avec les suiveurs prêts et une plaquette blanche pour y brancher les composants. Voir figure 5 Pour explication, l'encadré suiveur est juste un montage avec un AO dans lequel on injecte la tension du GBF. La sortie de ce suiveur va dans une entrée coaxiale reliée à un trou pour faire suivre le potentiel par le fil jaune, qui injecte le potentiel de E (E est la différence de potentiel entre ce fil jaune et la masse, donc c'est bien ce qu'on envoie au GBF, c'est juste qu'on s'affranchit de l'adaptation d'impédance). Le fil jaune arrive sur une patte du premier condensateur, qui est relié à une bobine, etc... La masse est donnée sur toute la ligne verticale de gauche, par le fil noir qui est relié à une masse de la plaquette verte. Si vous avez des doutes sur la façon de brancher sur la plaquette, prenez un multimètre en mode beep pour qu'il vous dise quels trous sont au même potentiel.

Petit tip : ne tirez pas trop fort sur les composantes pour les brancher ou les enlever, vous

---

<sup>1</sup>Oui, ce montage est d'une violence affligente, mais le pire reste le calcul des fréquences propres

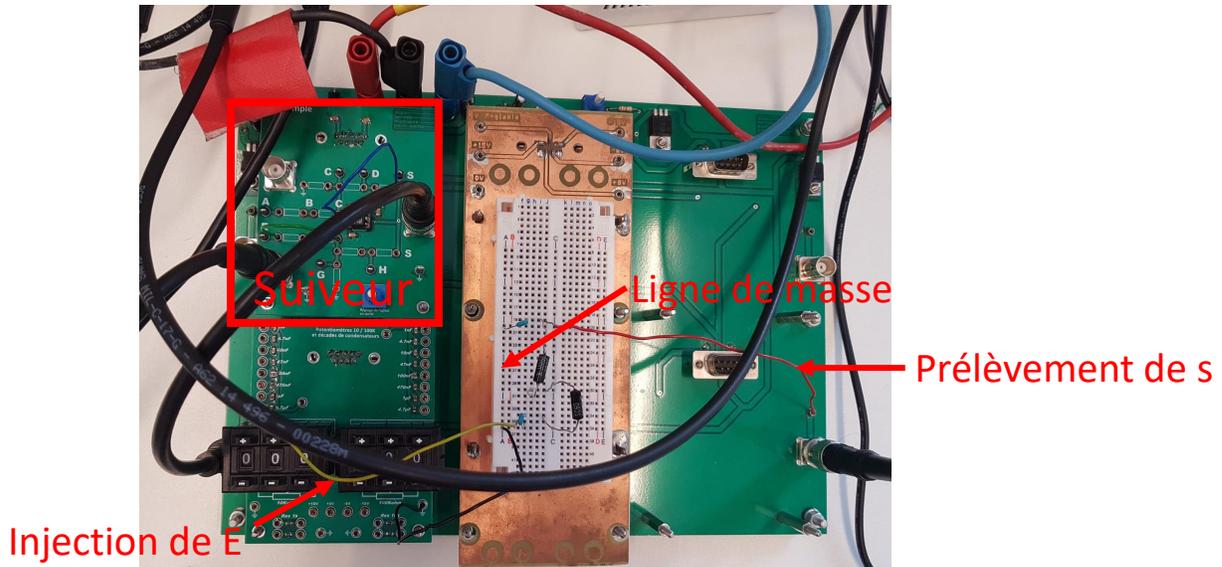


Figure 5: Photo du montage électronique

risquez de leur arracher les pattes. Pour cette raison, j'ai dû changer les composants juste avant le montage, et le point en direct ne tombait pas sur la droite :)

On peut aussi montrer le mode symétrique, en excitant aux bornes de la capacité  $\Gamma$  directement. De cette manière, les deux LC voient toujours la même tension, et on excite le mode symétrique. On peut par exemple regarder les deux réponses (avec des sondes d'oscilloscope pour les soucis de masse) à un échelon. Les deux systèmes sont en oscillations libres, et en phase. C'est exactement pareil que lorsqu'on prenait les pendules et qu'on les lâchait au même angle! [Deux oscillateurs c'est bien, 4 c'est mieux ! On va voir qu'à 4 oscillateurs, on voit apparaître fréquences propres](#)

### 3 Chaîne de 4 oscillateurs couplés

#### 3.1 Système

Pour 4 oscillateurs couplés linéairement, on aura apparition de 4 modes propres.

On utilise le système de masses-ressorts avec la caméra VIDEOCOM et le logiciel associé. Vous trouverez les notices sur le site, et une explication détaillée dans la biblio. Le système que vous voyez en figure 6 comporte 5 ressorts et 4 masses identiques. L'idée est la même que précédemment, il faut caractériser le couplage, mettre une baffe au système, et regarder les modes propres. On peut encore une fois s'amuser à exciter un à un les modes propres pour voir quel est le schémas de vibration.

#### 3.2 Caractérisation du couplage

Prenez un ressort, attachez-y une masse, mesurez l'élongation, on remonte à la constante de raideur. J'avais oublié de le faire :)



Figure 6: Dispositif de masses-ressorts

Notez que les raideurs sont très élevées, les ressorts proviennent d'un grand ressort qu'on a coupé en petits.

### 3.3 Détermination des modes propres

Le dispositif de détection des mouvements des ressorts est la caméra VIDEOCOM avec le logiciel associé. C'est assez intuitif, je vous laisse regarder les notices plutôt que de rallonger ce rapport. Si ma photo n'est pas floue, vous verrez en figure 6 que des bandes réfléchissantes sont situées sur les masses. Un signal lumineux sous formes de flash est envoyé dessus par des leds, la caméra capte la réflexion et on remonte au mouvement des masses de la sorte. (Attention, dispositif rare et cher). On envoie donc une grosse baffe sur une masse, et on fait la TF des oscillations pour retrouver les 4 modes propres.

Remarque : Frappez fort, n'hésitez pas, le cadre doit s'en souvenir, mettez une bonne patate de forrain dans cette masse, parce que sinon vous n'enverrez pas assez d'énergie pour exciter tous les modes... C'est la dernière baffe du montage, profitez-en.

On peut ensuite exciter mode par mode avec un vibreur branché sur une alim stabilisée, sa réponse fréquentielle est proportionnelle à la tension. Avec une TF du régime permanent (sinusoïdal forcé), vous pouvez remonter aux fréquences propres une à une.

## 4 Correction

**Pendules** : *Qu'est-ce que c'est que l'équilibrage de la tige* : Cela permet de mettre le centre de masse de la tige sur l'axe de rotation ce qui permet de s'affranchir du moment du poids de la tige. (Tige+cale pour les masses+gros truc sur l'axe de rotation... Bref tout sauf la masse)

*Est-ce que tu peux commenter la valeur du moment d'inertie du pendule ?*

*Si tu connais le moment d'inertie par rapport à un axe et que tu changes d'axe ?* : théorème de Huygens.

*Du coup quand on mesure le moment d'inertie, c'est le moment d'inertie de quoi ?* Masse, contre-poids, tige, tige qui tient, gros truc sur l'axe...

*Pourquoi on lance à 30 degrés ?* On se place dans l'approximation des petits angles mais on veut un angle le plus grand possible pour avoir des amplitudes les plus grandes possibles pour un beau signal qui dure longtemps.

*$T_0$  est plus petit avec le couplage, qu'est-ce qu'on peut en dire ?* : Avec le couplage, cela va entraîner le pendule à être ramené à sa position d'équilibre.

*Si on prend 2 oscillateurs et qu'on les couple est-ce qu'on aura forcément des battements ?* ça dépend de la condition initiale, il faut exciter les deux fréquences.

*Pourquoi l'enveloppe ne s'annule pas ?* Pas forcément la même amplitude dans chaque mode, il n'y a aucune raison que spectralement on injecte autant d'énergie dans les deux modes avec une condition initiale au pif.

*Qu'est-ce qu'on tire des deux fréquences du pendule ?* On peut vérifier à nouveau le moment d'inertie par exemple.

*Qu'est-ce qu'on peut tirer de la fréquence Antisymétrique ?* On aurait pu calculer la constante de couplage et voir si c'est cohérent.

*Comment on estime le facteur de qualité ?* On lâche le pendule, on compte le nombre d'oscillations avant qu'il s'arrête.

*Pourquoi on ne prend pas en compte les frottements ?*  $Q \approx 10$  (nombre d'oscillations), pas la peine de prendre en compte, la fréquence de résonance est la même que la fréquence propre

*L'équilibrage devrait être valable pour tous les angles donnés. Expérimentalement ?* Bof, des fois marche pas à tous les angles, problèmes de pas symétrique par exemple.

*Faire attention au def des moments d'inertie. Préférer le terme : moment d'inertie à vide et pas le moment d'inertie de la tige*

*Est-ce que tu as vérifié que tu as le même moment d'inertie ?* Dire qu'on les a caractérisé séparément et on voit que ça se recoupe au niveau des barres d'erreur donc on peut dire que c'est les mêmes, pof on s'en occupe plus C'était fait en préparation, mal dit à l'oral :/

*Pourquoi on choisit de mesurer cette constante de couplage ?* On doit l'évaluer expérimentalement car ça dépend de la façon dont on serre les pendules sur le fil, plus des matériaux

*Comment on relève l'angle à l'oscillo ?* On a un capteur d'angle, tige métallique qui va se déplacer sur une barrette de résistance donc on peut remonter à l'angle comme ça. Penser à regarder comment fonctionne le capteur pour faire la conversion.

*Attention : pour sortir les modes propres. Faire une acquisition un peu longue, ça on peut le prévoir avec les ordres de grandeurs et fait le blabla pendant l'acquisition.*

*On peut rajouter l'acquisition si on excite le mode symétrique ou antisymétrique et avoir fait l'autre en préparation ce qui permet de comparer les deux.*

**Couplage capacitif :** *Comment fonctionne un RLC mètre ? Il faut savoir d'où viennent les incertitudes et on va demander comment fonctionne le RLCmètre. Voir CR MP19 de 2020/2021 de Louis.*

*Qu'est-ce qui explique la largeur des pics ?* Facteur de qualité, qui est lié aux aspects résistifs des bobines

*Pourquoi on a mis un suiveur en entrée ?* GBF a une impédance de 50ohm, on s'affranchit des adaptations d'impédance.

*Cette manip se prête bien à dire que là on met toutes les fréquences en donnant une impulsion alors que le pendule c'est un changement de condition initiale*

*Si un composant a cramé, le point ne va pas sur la droite et qu'on peut pas faire autrement que changer de composant il faut le dire au jury. J'ai été honnête :)*

*Le jury pourrait demander de tout recabler en direct pendant les questions, on est contraint en temps donc on ne le fait pas en direct.*

*Il faut dire qu'on a vérifié les caractéristiques des composants pour être sûr que les deux oscillateurs soient identiques. Arnaud conseille de faire ce montage avec un couplage capacitif parce que avec l'inductance c'est moins simple conceptuellement. Oui, et en plus le système qu'on a dans les stocks ne permet pas d'être aussi quantitatif*

**Chaîne d'oscillateurs couplés** *Pourquoi 4 fréquences propres ?* Parce que 4 oscillateurs

*Si on voyait l'apparition d'harmonique qu'est-ce que ça veut dire ?* Non linéarité

*Il faut mettre une impulsion de grande amplitude pour bien voir les quatre pics* TAPPEZ FORT, ON VEUT VOIR LA HARGNE DE L'AGREGATIF

*Il y a 4 modes propres, est-ce qu'on peut connaître quel sont la hiérarchisation des modes ?* Pour chaque mode il faut compter le nombre de ressort qui se contracte. 1er mode : tous en phase, aucun ressort ne se contracte, 2e : 1 ressort, etc... Voir la biblio pour des schémas avec des flèches assez clairs

*Ressorts hypers rigides car ils sont issus d'un même ressort qui a été coupé donc ça les rend encore plus rigide*

*Comment fonctionne le système d'acquisition ?* Flash qui se réfléchissent sur des bandes réfléchissantes sur les masses. Barrette CCD dans l'objectif.

*L'idée de cette manip c'est de généraliser et on voit bien en regardant une réponse impulsionnelle.*

*Comment on choisit la fréquence des flashes ?* On la prend la plus grande possible, c'est la fréquence d'échantillonnage en gros. Ça permet d'éviter le pointage par une vidéo. Il faut mettre un drap noir derrière.

**Commentaire général** Juste en temps, mais ça peut s'améliorer en gérant le temps des acquisitions en expliquant pendant ce temps là. Ouvrir sur une chaîne d'oscillateurs c'est pas mal, il y a des choses plus quantitatives. Mais celui là il y a quand même des choses à dire et c'est plus simple.

## 5 Bibliographie

Arnaud Le Diffon et al. Physique expérimentale. De Boeck. Pour la troisième expérience.