DNS

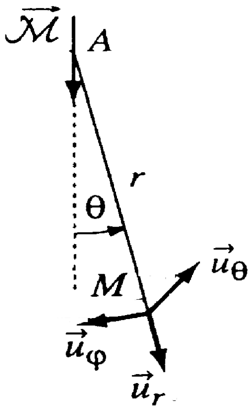
Sujet

Chute d'un aimant dans un tube métallique........1
I.Potentiel vecteur et champ créés par un dipôle magnétique........1
II.Courant induit dans un circuit élémentaire........2
III.Force exercée par le tuyau sur l'aimant........3
IV.Mouvement de chute de l'aimant dans le tuyau métallique........4
V.Expérience........4

Chute d'un aimant dans un tube métallique

Le repère terrestre est pris galiléen et le module de l'accélération de la pesanteur est $g=9{,}81\,.m.s^{-2}$

I. Potentiel vecteur et champ créés par un dipôle magnétique



Le potentiel vecteur créé en un point M par un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}=\mathcal{M}\,\vec{u}_z$ placé en A est donné par l'expression suivante où $r=AM$: $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{r}}{r^3}$.

1. Représenter le vecteur $\vec{A}(M)$ et donner ses coordonnées sur la base sphérique en fonction de

$\mathcal{M}$, r et θ .

2. En partant de l'expression intrinsèque de $\vec{A}$, déterminer l'expression intrinsèque du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par un dipôle sachant que:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{a}(div\,\vec{b})-\vec{b}(div\,\vec{a})+(\vec{b}.\overrightarrow{grad})\vec{a}-(\vec{a}.\overrightarrow{grad})\vec{b} \quad \text{avec} \quad (\vec{b}.\overrightarrow{grad})=(\vec{b}.\vec{\nabla})$$

3. Représenter le vecteur $\vec{B}(M)$ et donner les expressions des composantes B_r et B_θ du champ magnétique (en coordonnées sphériques) créé par le dipôle magnétique A au point M du circuit (C) en fonction de $\mathcal{M}$, r et θ .

II. Courant induit dans un circuit élémentaire

Le temps de chute d'un petit aimant est beaucoup plus important dans un tuyau métallique que dans un tube de verre de même géométrie.

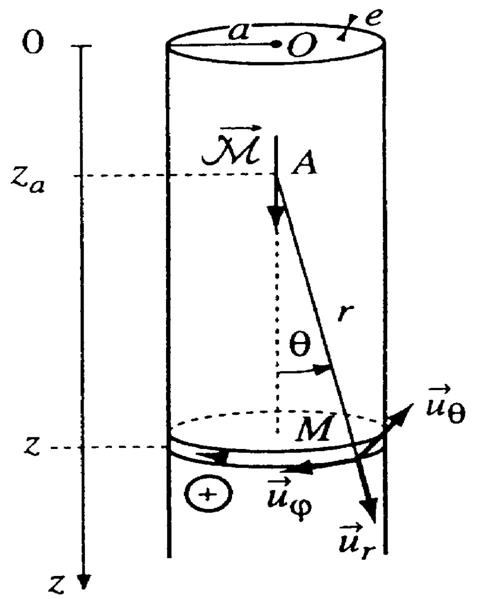


Schéma et notations

Un petit aimant A est lâché sans vitesse initiale du point O ($z=0$). L'aimant est assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}=\mathcal{M}\vec{u}_z$ qui au cours du mouvement reste toujours vertical et dirigé vers le bas. Son abscisse au cours de la chute est notée $z_A(t)$, l'axe Oz étant orienté suivant la verticale descendante. Cette chute s'effectue à l'intérieur d'un tuyau métallique cylindrique creux, d'épaisseur e faible devant le rayon moyen a . La conductivité électrique du métal est σ . Les frottements de l'air sont négligés.

L'extrémité supérieure du tuyau est placée en $z=0$ et sa longueur est L .

Dans un premier temps il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote z constitué par un tronçon de tuyau de hauteur dz . Un point M de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine l'aimant A et l'orientation positive du circuit est choisie suivant $+\vec{u}_\varphi$.

On pourra exprimer les résultats en fonction de θ ou en fonction de z et z_A .

4. Expliquer qualitativement l'origine d'un courant di induit dans le circuit (C) ; prévoir son sens par la loi de Lenz. Interpréter l'existence d'une force de freinage s'exerçant sur l'aimant.

5. On considère un point M du circuit (C)
   - Déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ créé par par le dipôle magnétique.
   - Pour quelle raison ce potentiel est-il fonction du temps ?

6. Calculer le flux du champ dipolaire à travers le contour circulaire précédent de rayon a .

7. Déterminer l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m(M)$ en notant $v=\frac{dz_A}{dt}>0$ la vitesse de chute de l'aimant.

Dans la suite ce champ est supposé uniforme sur l'épaisseur e du métal (car $e \ll a$).

8. Déterminer le courant di induit par ce champ électromoteur dans le circuit (C) par la loi d'Ohm locale et le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers une surface adéquate.

9. Retrouver ce résultat par la force électromotrice induite e_{induit} et la conductance dG du circuit (C) .

10. Le signe de di est-il conforme à la prévision faite plus haut?

III. Force exercée par le tuyau sur l'aimant

Soit $\vec{F}$ la force exercée par le tuyau sur l'aimant et F_z sa coordonnée sur l'axe Oz . Il est plus simple d'évaluer son opposée $F_z'=-F_z$ c'est-à-dire la force exercée par l'aimant sur le tuyau.

11. Exprimer sur la base $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ la force $\overrightarrow{d^2F'}$ exercée par le champ de l'aimant sur un élément $\vec{dl}=dl\,\vec{u}_\varphi$ du circuit (C) et la représenter sur un dessin, puis la projeter sur Oz et en donner la résultante dF_z' pour le circuit (C) entier en fonction de di et des autres données.

12. Déterminer $\vec{F}=F_z\vec{u}_z$ la force exercée par le tuyau entier sur l'aimant. On suppose que a est très petit: on fera ici $a \ll z_A$ et $a \ll L-z_A$. On donne $\int_0^\pi \sin^6\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{5\pi}{128}$ ou encore $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^5}=\frac{5\pi}{128}$ (On pourra si nécessaire poser $x=\frac{(z-z_A)}{a}$).

13. En déduire que la force de freinage du tuyau sur l'aimant est du type $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$ où α est un coefficient positif. Donner l'expression de α .

14. En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'aimant.

15. Application numérique. L'expérience est facilement réalisable en prenant :
   - pour le tuyau de cuivre : $a=3,5\,mm$; $e=1\,mm$; $L=1\,m$; $\sigma=5,8.10^7\,S.m^{-1}$.
   - pour l'aimant en Néodyme-Fer-Bore de masse m (en forme de petit disque de

$diamètre=5\,mm$ et $hauteur=2\,mm$, le constructeur fournit les valeurs : masse $m=0{,}29\,g$ et $\mathcal{M}=3{,}7.10^{-2}\,A.m^2$.

- par ailleurs, $\mu_0=4\pi.10^{-7}\,H.m^{-1}$.

Donner la valeur numérique de α .

16. On se propose de retrouver l'équation différentielle par une approche énergétique. En partant des grandeurs induites dans le métal du tube, déterminer la puissance P_J dissipée par effet Joule. Retrouver l'équation différentielle du mouvement en effectuant un bilan énergétique.

IV. Mouvement de chute de l'aimant dans le tuyau métallique

17. Intégrer l'équation différentielle du mouvement de l'aimant et exprimer sa vitesse $v(t)$ et sa cote $z_A(t)$ à l'aide de la vitesse limite atteinte v_{lim} et d'un temps τ caractéristique du régime transitoire. Donner l'expression de v_{lim} en fonction de α et la relation entre v_{lim} et τ .

18. Calculer numériquement v_{lim} , τ et $z_A(\tau)$. Commenter.

19. En déduire simplement le temps de chute total t_{Ch} de l'aimant dans le tuyau et le comparer à celui t_{Ch}' de sa chute dans un tube de verre de mêmes caractéristiques géométriques. Commenter.

20. L'expérience donne pour le tuyau de cuivre un temps de chute de l'ordre de $10\,s$; le modèle développé dans ce problème paraît-il satisfaisant ?

21. Les frottements de l'air ont été négligés dans cette étude. Est-ce raisonnable ?

V. Expérience

Dans une étude expérimentale, on détecte le passage de l'aimant à travers des bobines enserrant le tube, en visualisant à l'oscilloscope, la tension induite alors à leur bornes. On compare alors le temps de chute et l'amplitude du signal électrique, pour des tubes de cuivre, laiton et plexiglas (ce dernier est un plastique transparent servant de référence).

Les deux bobines mobiles s'enfilent sur le tube. La distance entre les deux bobines est désignée par L . On laisse tomber l'aimant en haut du tube sans vitesse initiale. Le signal obtenu possède une forme caractéristique, qu'on retrouve sur les deux voies, mais décalées temporellement . La différence de temps T entre ces deux courbes correspond au temps de chute sur la distance L .

On suppose ici que les bobines sont des bobines plates de rayon a , comportant N spires. L'aimant reste assimilé à un dipôle. On suppose de plus que la vitesse v de l'aimant est constante.

22. Justifier qualitativement l'allure de la courbe obtenue lors du passage de l'aimant à travers une bobine.

23. Déterminer l'équation de cette courbe.

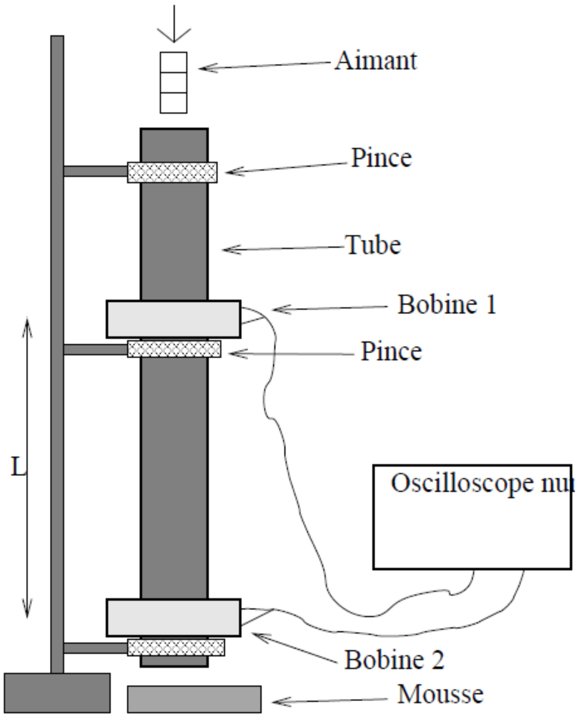
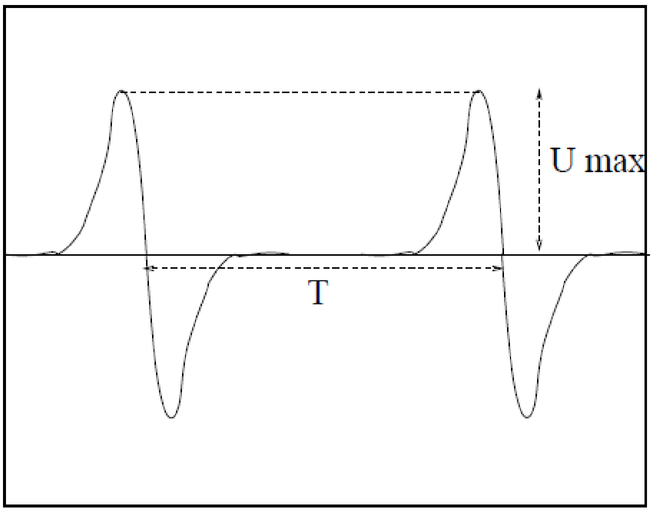


Schéma de l'expérience $\left(\textit{Préparation à l'agrégation Ens Montrouge} \right)$

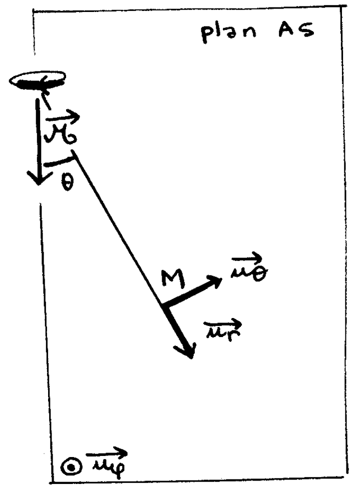


Signal observé à l'oscilloscope (2 voies) lors du passage de l'aimant à travers les bobines
$\left(\textit{Préparation à l'agrégation Ens Montrouge} \right)$

Réponses

1) Le plan $(M \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ qui contient le point A et $\vec{\mathcal{M}}$ est un plan d'antisymétrie car $\vec{\mathcal{M}}$ est un vecteur axial (et non polaire comme le moment dipolaire $\vec{p}$ en électrostatique)

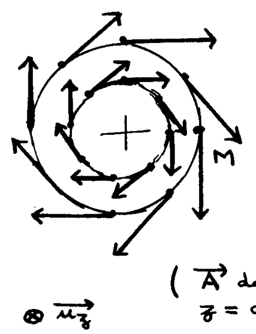
On peut penser pour $\vec{\mathcal{M}}$ à une petite boucle de courant, ce qui rend le résultat plus évident.



donc $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à ce plan ($\vec{A}$ vecteur polaire)

$$\boxed{\vec{A}(M) = A(r, \theta, \cancel{\varphi})\ \vec{u_\varphi}}$$

Ici $\vec{A}(M)$ est dirigé vers l'avant (comme le courant dans la boucle)



($\vec{A}$ dans un plan z = cste)

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r_{AM}}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \quad \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathcal{M}\cos\theta & r \\ & -\mathcal{M}\sin\theta & 0 \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi} & 0 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathcal{M} \sin\theta \ \vec{u_\varphi}}$$

---

2)

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

soit en utilisant la formule proposé avec $\vec{a} = \vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{b} = \frac{\vec{r}}{r^3}$

puisque $\vec{a}$ = cste , $\text{div}\,\vec{a} = 0$ et $(\vec{b}.\overrightarrow{grad})\,\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{\mathcal{M}}\left(\text{div}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - (\vec{\mathcal{M}}.\overrightarrow{grad})\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$

Calculs

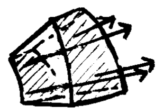
1°) $\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$

$= \text{div}\left(\frac{\vec{u_r}}{r^2}\right)$

Il s'agit de la divergence d'un champ en $\frac{\vec{u_r}}{r^2}$ (coordonnées sphériques).

On sait que cette divergence est nulle.

(Penser à un flux autour d'une "petite" surface formée en sphériques. Le champ est en $\frac{1}{r^2}$, les surfaces qui interviennent sont en r^2. Le flux est alors nul)



2°) $(\vec{\mathcal{M}}.\overrightarrow{grad})\ \frac{\vec{r}}{r^3}$

Pour évaluer ce terme, on travaille en coordonnées cartésiennes. Pour simplifier, on fait $\vec{r} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}$

$$\left(\mathcal{M}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{M}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{M}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}}{r^3}\right)$$

On va étudier le 1^{er} terme

$$\mathcal{M}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\mathcal{M}_x\,\overrightarrow{u_x}}{r^3} + \mathcal{M}_x\,\overrightarrow{r}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\mathcal{M}_x\,\overrightarrow{u_x}}{r^3} + \mathcal{M}_x\,\overrightarrow{r}\ \times -\frac{3}{r^4}\ \frac{\partial r}{\partial x}$$

or $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ on différentie

$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz$$

donc :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$= \frac{\mathcal{M}_x\,\overrightarrow{u_x}}{r^3} - 3\mathcal{M}_x\,x\,\frac{\overrightarrow{r}}{r^5}$$

Avec les 3 termes :

$$(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{grad})\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}}}{r^3} - 3\frac{\overrightarrow{r}}{r^5}\underbrace{(\mathcal{M}_x x + \mathcal{M}_y y + \mathcal{M}_z z)}_{\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{r}}$$

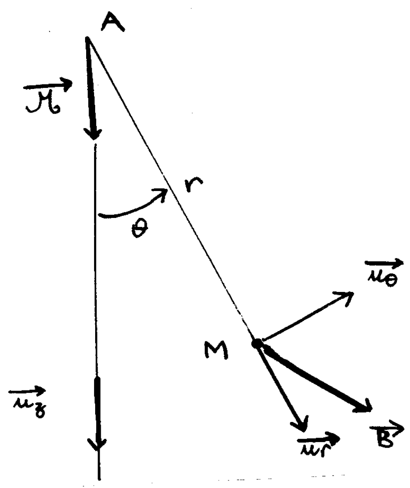
finalement

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{3(\overrightarrow{\mathcal{M}}\overrightarrow{r})\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\mathcal{M}}\,r^2}{r^5}}$$

---

3) $\overrightarrow{B}(M)$ appartient au plan d'antisymétrie $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$

donc $\overrightarrow{B} = B_r\,\overrightarrow{u_r} + B_\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathcal{M} r \cos\theta)\, r\, \vec{u_r} - (\mathcal{M}\cos\theta\, \vec{u_r} - \mathcal{M}\sin\theta\, \vec{u_\theta})\, r^2}{r^5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \end{aligned}}$$

---

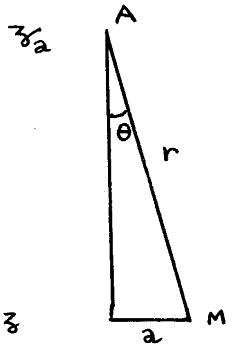
4) $\longrightarrow$ L'aimant $\vec{\mathcal{M}}$ bouge donc <u>le flux de $\vec{B}$ dans la spire varie</u>.
Il y a création d'une f.e.m. induite entraînant (circuit fermé) la naissance d'un courant induit dans la spire

$\longrightarrow$ Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

- méthode flux.
  <u>Si $\vec{\mathcal{M}}$ s'approche</u>, Φ_{ext} dans la spire augmente. Le flux propre est négatif pour compenser soit $\underline{i<0}$
  Si $\vec{\mathcal{M}}$ s'éloigne, $i>0$
- méthode force
  <u>si $\vec{\mathcal{M}}$ s'approche</u>, la force sur l'aimant doit être négative (freinage). L'aimant présente son pôle Nord. La spire doit présenter une face Sud négative – face Sud conventionnelle – (face Nord). Donc $\underline{i<0}$
  Si $\vec{\mathcal{M}}$ s'éloigne, l'aimant présente son pôle Sud. La face Nord conventionnelle doit être effectivement Nord pour attirer l'aimant et le freiner. Donc $i>0$

---

5)



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathcal{M} \sin\theta\, \vec{u_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi a^2} \sin^3\theta\, \vec{u_\varphi}}$$ ou :

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{a}{(a^2+(z-z_a)^2)^{3/2}} \vec{u_\varphi}}$$

Ce potentiel dépend du temps
(θ dépend du temps ou
z_a dépend du temps)

---

6) Calcul du flux

Plusieurs méthodes possibles.

Méthode 1

$$\Phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}} = \iint \vec{B}_{\text{aimant}} \, \vec{dS}_{\text{spire}}$$

$$= \iint \vec{\text{rot} A} \, \vec{dS}$$

$$\boxed{\Phi = \oint_{\text{spire}} \vec{A}_{\text{aimant}} \, \vec{dl}_{\text{spire}}}$$

$$= \oint A \vec{u_\varphi} \, a \, d\varphi \, \vec{u_\varphi}$$

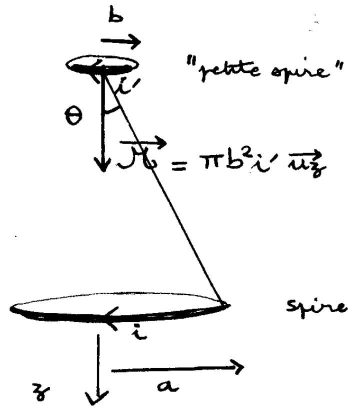
$$= 2\pi A a$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a} \sin^3\theta}$$

ou

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2} \frac{a^2}{(a^2+(z-z_a)^2)^{3/2}}}$$

Méthode 2



$$\Phi_{\text{gde spire} \rightarrow \text{petite spire}} = B_{\text{axe}} \, \pi b^2$$

(cf champ au voisinage de l'axe)

$$= \frac{\mu_0 i \sin^3\theta}{2a} \pi b^2$$

$$= M \, i$$

(mutuelle inductance)

avec $M = \dfrac{\mu_0 \sin^3\theta}{2a} \pi b^2 i$

$$\boxed{\phi_{\substack{\text{petite}\\ \text{spire}\\ \to \text{gde}}} = M\, i'}$$

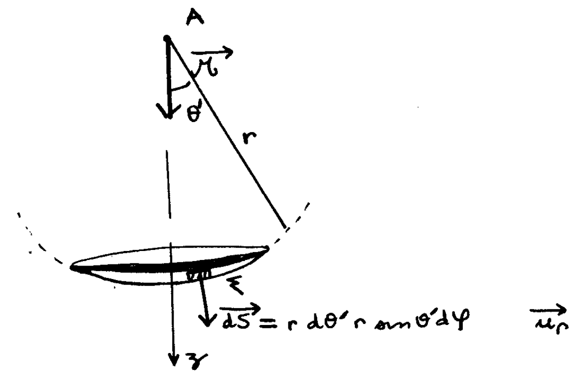
$$= \frac{\mu_0 \sin^3\theta}{2a} \underbrace{\pi b^2 i'}_{\mathcal{M}}$$

on retrouve

$$\phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a} \sin^3\theta$$

Méthode 3

Faire le calcul direct (pénible avec une surface plane)
On prend plutôt une surface sphérique Σ de centre A



$$\boxed{\phi = \iint_\Sigma \vec{B}\,\vec{dS}}$$

$$= \iint_\Sigma B_r\, dS$$

$$= \iint_\Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}\cos\theta'}{r^3}\, r\,d\theta'\, r\sin\theta'\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta'=0}^{\theta'=\theta} \sin\theta' \underbrace{\cos\theta'\, d\theta'}_{d(\sin\theta')}$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{r} \frac{\sin^2\theta}{2}$$

on retrouve le même résultat avec $r\sin\theta = a$

7) Le champ électromoteur est, au niveau du circuit étudié, en M

$$\boxed{\overrightarrow{E_m}_{(M)} = -\frac{d\vec{A}}{dt}(t)}$$

$$= -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi a^2}\frac{d\sin^3\theta}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$

<u>le calcul :</u>

$$\frac{d\sin^3\theta}{dt} = \frac{d\sin^3\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= 3\sin^2\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dz_A}\frac{dz_A}{dt}$$

$$= \frac{d\theta}{dz_A}\, v$$

$$\tan\theta = \frac{a}{z-z_A}$$

$$\text{donc } z - z_A = \frac{a}{\tan\theta}$$

$$-dz_A = -\frac{a}{\sin^2\theta}d\theta$$

Le calcul est <u>plus direct</u> en choisissant l'autre expression de $\vec{A}$ en fonction de z et z_A

$$\boxed{\overrightarrow{E_m} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}}{4\pi a^3}\sin^4\theta\cos\theta\, v\,\overrightarrow{u_\varphi}} \text{ ou}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_m} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{a(z-z_a)}{(a^2+(z-z_a)^2)^{5/2}}\, v\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

---

8) On sait que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}\,V + \overrightarrow{E_m}$$

Vu les symétries $\vec{E}$ est selon $\overrightarrow{u_\varphi}$ (cf plan d'antisymétrie contenant $\vec{\mathcal{M}}$ et M) et l'on a déjà vu que $\overrightarrow{E_m}$ était selon $\overrightarrow{u_\varphi}$

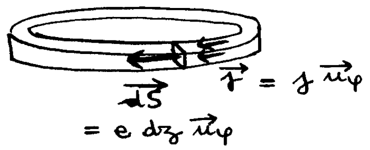
Le $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ devrait être selon $\overrightarrow{u_\varphi}$ mais <u>V est indépendant de φ</u>.

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est nul (V est uniforme)

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_m}$$

$$\vec{j} = \sigma\,\overrightarrow{E_m}$$

$$di = \vec{j}\,\overrightarrow{dS}$$



$$di = j\,e\,dz$$
$$= \sigma\,E_m\,e\,dz$$

$$\boxed{di = -\sigma\,e\,\frac{3\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\,\frac{a(z-z_A)}{(a^2+(z-z_A)^2)^{5/2}}\,v\,dz}$$ ou

le calcul pour formule avec θ

$$z - z_A = \frac{a}{\tan\theta}$$
$$dz = -\frac{a}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$\boxed{di = \sigma\,e\,\frac{3\mu_0\mathcal{M}\,v}{4\pi a^2}\,\sin^2\theta\,\cos\theta\,d\theta}$$

---

9) autre méthode.

On détermine directement la force électromotrice ($e_{induit} = \oint \vec{E_m}\,\vec{dl}$ $= 2\pi a E_m$)

par
$$e_{induit} = -\frac{d\phi}{dt}$$
$$= -\frac{\mu_0\mathcal{M}}{2a}\,\underbrace{\frac{d}{dt}\sin^3\theta}_{\text{calcul déjà fait en 7)}}$$

$$3\sin^2\theta\cos\theta\;v\;\frac{\sin^2\theta}{a}$$

$$\boxed{e_{induit} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}}{2a^2}\,\sin^4\theta\,\cos\theta\,v}$$ ou

$$\boxed{e_{induit} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}\,a^2}{2}\,\frac{(z-z_A)}{(a^2+(z-z_A)^2)^{5/2}}\,v}$$

puis

cf
$$R = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\ell}{S}$$
$$G = \sigma\,\frac{S}{\ell}$$

$$\boxed{dG = \sigma\,\frac{dS}{\ell}}$$

$$di = dG\;e_{induit}$$

$$di = \sigma \frac{e\, dz}{2\pi a} \underbrace{e_{induit}}_{2\pi a\, E_m}$$

$$di = \sigma\, e\, dz\, E_m$$

ce qui correspond au résultat précédent.

---

10) $\boxed{di \text{ est du signe de } z_a - z}$ ou $\boxed{di \text{ est du signe de } \cos\theta}$

si $z > z_a$ $\left(\theta < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\theta > 0\right)$ $\vec{\mathcal{M}}$ s'approche $di > 0$

si $z < z_a$ $\left(\theta > \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\theta < 0\right)$ $\vec{\mathcal{M}}$ s'éloigne $di < 0$

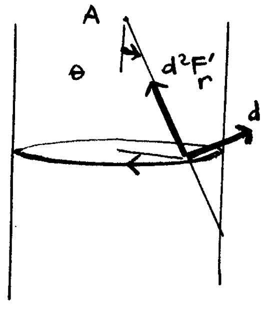
---

11) Force exercée par l'aimant sur le tuyau

$$\overrightarrow{d^2F'} = di\ \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}_{aimant}$$

$$\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{a\,d\varphi}_{dl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_r \\ B_\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{d^2F'} = di\ dl\ \left(-B_\theta \overrightarrow{u_r} + B_r \overrightarrow{u_\theta}\right)}$$



Vu la symétrie de révolution autour de l'axe, $\overrightarrow{dF'}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$.

$$d^2F'_z = di\ dl\ \left(-B_\theta \underbrace{\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_z}}_{\cos\theta} + B_r \underbrace{\overrightarrow{u_\theta}.\overrightarrow{u_z}}_{-\sin\theta}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{dF'} = -di\ 2\pi a\ \left(B_\theta \cos\theta + B_r \sin\theta\right) \overrightarrow{u_z}}$$

$$= -di\ 2\pi a\ \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin\theta}{r^3} \cos\theta + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos\theta}{r^3} \sin\theta\right) \overrightarrow{u_z}$$

$$= -\frac{3}{2}\,\mu_0\, a\, \mathcal{M}\, di\, \frac{\sin\theta\,\cos\theta}{r^3}\,\overrightarrow{u_z}$$

avec $r\sin\theta = a$

$$\boxed{\overrightarrow{dF'} = -\frac{3}{2}\,\frac{\mu_0\mathcal{M}}{a^2}\, di\, \sin^4\theta\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_z}}$$ ou

$$\boxed{\overrightarrow{dF'} = -\frac{3}{2}\,\mu_0\mathcal{M}\,a^2\, di\, \frac{(z-z_a)}{\left(a^2+(z-z_a)^2\right)^{5/2}}\,\overrightarrow{u_z}}$$

---

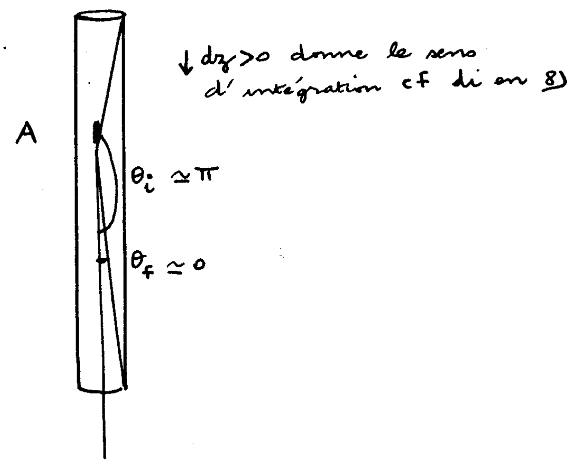
12)

$$\overrightarrow{dF'} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0\mathcal{M}}{a^2}\,\frac{\sigma e\, 3\mu_0\mathcal{M}v}{4\pi a^2}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta\, \sin^4\theta\cos\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

$$= -\frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e v}{8\pi a^4}\,\sin^6\theta\,\cos^2\theta\, d\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{dF'}$$

$$\overrightarrow{F} = \frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e v}{8\pi a^4}\int_{\pi}^{0}\sin^6\theta\,\cos^2\theta\, d\theta\,\overrightarrow{u_z}$$



avec :

$$\int_0^{\pi}\sin^6\theta\,\cos^2\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{128}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{45}{1024}\left(\frac{\mu_0\mathcal{M}}{a^2}\right)^2\sigma e v\,\overrightarrow{u_z}}$$

remarque : si on travaille avec z et z_a

$$\overrightarrow{dF'} = -\frac{3}{2}\mu_0 \mathcal{M} a^2 \times -\sigma e \frac{3\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{a(z-z_a)}{(a^2+(z-z_a)^2)^{5/2}} v\, dz \times \frac{(z-z_a)}{(a^2+(z-z_a)^2)^{5/2}} \overrightarrow{u_z}$$

$$= \frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e v}{8\pi} \, a^3 \frac{(z-z_a)^2}{(a^2+(z-z_a)^2)^5} dz\, \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{dF'} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{(z-z_a)}{a}$$

$$F = -\frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e v a^3}{8\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2x^2}{(a^2+a^2x^2)^5} a\, dx}_{\frac{1}{a^7}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^5}dx}$$

$$\frac{1}{a^7}\,\frac{5\pi}{128}$$

On retrouve bien le même résultat.

13) Cette force est donc une force de freinage de la forme

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v}$$

avec

$$\boxed{\alpha = \frac{45}{1024}\left(\frac{\mu_0\mathcal{M}}{a^2}\right)^2 \sigma e}$$

14) Equation différentielle :

$$m\vec{g} - \alpha\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$/z \quad \boxed{mg - \alpha v = m\frac{dv}{dt}}$$

15) A.N.

$$\alpha = \frac{45}{1024}\left(\frac{4\pi\, 10^{-7}\ 3{,}7\ 10^{-2}}{(3{,}5\ 10^{-3})^2}\right)^2 5{,}8\ 10^7\ \ 10^{-3}$$

$$= 37\ 10^{-3} \quad \text{S.I.}$$

recherche de la dimension de α

- $[\alpha] = \dfrac{[F]}{[v]}$ donc α en N s m^{-1}
- ou en remplaçant $[F]$ par $[M][a]$

$$[\alpha] = \frac{[M][v][T]^{-1}}{[v]}$$

donc α en kg s^{-1}

$$\boxed{\alpha = 37\ 10^{-3}\ \text{kg s}^{-1}}$$

---

15) Comme souvent, la démonstration la plus rapide est de nature énergétique

$$\underbrace{E}_{\substack{\text{énergie mécanique}\\ \text{totale de l'aimant}}} = \frac{1}{2} m v^2 - m g z$$

Le bilan électromécanique indique que cette énergie diminue à cause de la puissance apparue par effet Joule à cause des courants dans le tube (on peut aussi écrire le théorème de l'énergie cinétique au lieu de travailler par l'énergie totale)

$$dE_{totale} = - P_J\, dt$$

avec en raisonnant sur le tronçon de tuyau déjà utilisé :

$$dP_J = \underbrace{dG}_{\substack{\text{conductance}\\ \text{élémentaire}}}\ e^2_{induite}$$

$dG \xrightarrow{\text{voir 9)}} \dfrac{\sigma e dz}{2\pi a}$, $dz \xrightarrow{\text{voir 8)}} \dfrac{-a\, d\theta}{\sin^2\theta}$

$e_{induite} \xrightarrow{\text{voir 9)}} \left(-\dfrac{3\mu_0 \mathcal{M}}{2a^2} \sin^4\theta \cos\theta\ v\right)^2$

$$\boxed{dP_J = -\frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 e \sigma v^2}{8\pi a^4} \underbrace{\sin^6\theta \cos^2\theta\ d\theta}_{\substack{\text{intégrale entre } \pi \text{ et } 0\\ = -5\pi/128}}}$$

qu'on intègre de π à 0 pour obtenir P_J

$$\boxed{P_J = \frac{45}{1024}\left(\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{a^2}\right)^2 \sigma e v^2 = \alpha v^2}$$

finalement

$$\boxed{d\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = -P_J\, dt}$$

$$m v\, dv - mg\, dz = -\alpha v^2\, dt$$

$$m v \frac{dv}{dt} - mg v = -\alpha v^2$$

en éliminant la solution $v=0$ (solution parasite)

$$m \frac{dv}{dt} - mg = -\alpha v$$

On a bien retrouvé l'équation différentielle du mouvement.

---

17)
$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = g$$

On pose $\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$

On pose $\boxed{v_{lim} = \frac{m}{\alpha} g = \tau g}$ (solution particulière quand $\frac{dv}{dt} = 0$)

L'équation différentielle s'écrit

$$\boxed{\tau \frac{dv}{dt} + v = v_{lim}}$$

$$v = A\, e^{-t/\tau} + v_{lim}$$

C.I. $\quad 0 = A + v_{lim}$

$$\boxed{v = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$z_a = v_{lim}\, t + v_{lim}\, \tau\, e^{-t/\tau} + B$$

C.I. $\quad 0 = 0 + v_{lim}\, \tau + B$

$$\boxed{z_a = v_{lim}\, t - v_{lim}\, \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

---

18)

$$\tau = m/\alpha$$
$$= 0{,}29\ 10^{-3} / 37\ 10^{-3}$$
$$\boxed{\tau = 7{,}9\ 10^{-3}\ s}$$

$$v_{lim} = \tau g$$
$$= 7{,}9\ 10^{-3} \times 9{,}81$$
$$\boxed{v_{lim} = 0{,}077\ ms^{-1}}$$

$$z_a(\tau) = v_{lim}\ \tau\ e^{-1}$$
$$= 0{,}077 \times 7{,}9\ 10^{-3} \times 0{,}368$$
$$\boxed{z_a(\tau) = 0{,}23\ mm}$$

On pourrait calculer par exemple $z_a(5\tau)$, la vitesse limite est alors atteinte à moins de 1% près.

On obtient $z_a(5\tau) = 2{,}5\ mm$.

On peut considérer que la vitesse limite est quasiment atteinte instantanément lors de la chute,

---

19) Dans le tuyau, on peut donc assimiler le mouvement à un mouvement uniforme à la vitesse v_{lim}.

$$\boxed{t_c \simeq \frac{L}{v_{lim}}}$$

A.N.
$$= \frac{1}{0{,}077}$$
$$\boxed{t_c = 12{,}9\ s}$$

Dans un tube de verre

$$\boxed{t'_c = \sqrt{\frac{2L}{g}}}$$

A.N.
$$= \sqrt{\frac{2\times 1}{9{,}81}}$$
$$\boxed{t'_c = 0{,}45\ s}$$

La différence est spectaculaire.

---

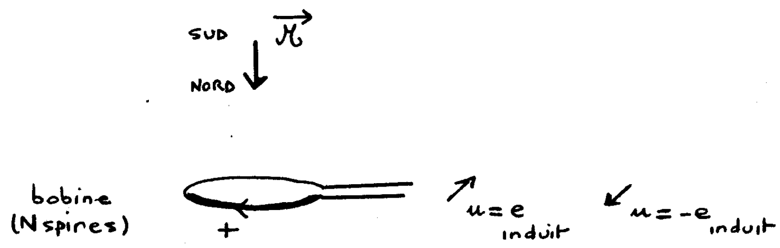
20) Le modèle développé donne un ordre de grandeur correct. (12,3 s au lieu de 10 s)
On a négligé dans l'analyse d'un tronçon de tube, l'influence du champ magnétique créé par les courants induits dans les autres tronçons (influence du champ propre du tube)

---

21) Les frottements de l'air sont négligeables puisque la force de Laplace (analogue à du frottement visqueux) fait atteindre la vitesse limite " quasi " instantanément.

---

22) – La bobine est en circuit-ouvert. On visualise donc e.
– La forme de la courbe dépend du sens d'introduction de l'aimant et du sens de branchement de la bobine



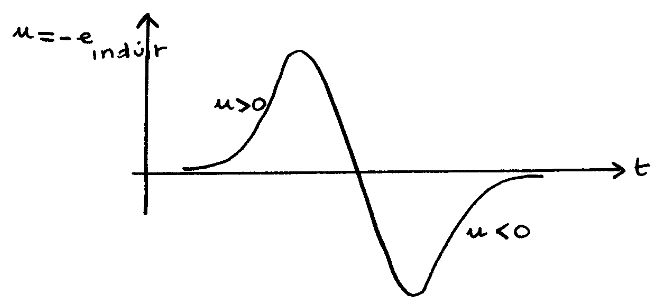
• si l'aimant s'approche : ϕ augmente ($\phi > 0$ de + en + grand)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} < 0$$

• si l'aimant s'éloigne : ϕ diminue ($\phi < 0$ de + en + petit)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} > 0$$

Donc choisir le branchement $u = -e_{induit}$



---

23) On ne tient pas compte ici de la présence du tube.
Le calcul a déjà été fait en 9) (on tient compte de N spires)

$$e_{induit} = - \frac{3 \mu_0 \mathcal{M} a^2 N}{2} \frac{(z - z_a)}{(a^2 + (z - z_a)^2)^{5/2}} v$$

Je fais

$$\left| \begin{array}{l} z_{bobine} = z = 0 \\ z_a = vt \end{array} \right.$$

La bobine traverse l'aimant en $t = 0$

$$\boxed{u = - \frac{3 \mu_0 \mathcal{M} a^2 N}{2} \frac{v^2 t}{(a^2 + v^2 t^2)^{5/2}}}$$

tracé de la courbe :