

# LP49 : Oscillateurs: portraits de phase et non linéarités

**Armel JOUAN, Géraud DUPUY**

**Leçons annexes :**

- Non-linéarités. Applications.
- Traitements linéaires et non linéaires du signal

**Niveau : L3**

## **1 Exemple du pendule simple**

### **1.1 Régime des petits angles [1]**

- Poser l'énergie mécanique et la dériver pour obtenir l'équation du mouvement
- On suppose que l'on est dans le régime des petits angles
- On résout avec une vitesse initiale et sans position initiale.
- Souligner le phénomène d'isochronisme
- On obtient position et vitesse, ce qui permet parfaitement de définir un état en mécanique déterministe

### **1.2 Portrait de phase [2]**

- On sait que l'on peut déterminer la trajectoire d'un système avec la connaissance de sa position et de sa quantité de mouvement
- Représentons l'une en fonction que l'autre pour le pendule simple. On trouve une équation de cercle (en utilisant les bonnes variables, sinon on a une ellipse)
- Montrer simulation python (1), (3) voir manip du pendule pesant avec une voie 2 en mode AC pour dériver. (penser à mentionner qu'on parcourt dans le sens des aiguilles d'une montre)

- On a une approche très générale ici, voyons si on peut étendre au cas des grands angles
- On remarque 4 "zones remarquables" : les cercles aux petits angles, les cercles déformés liés aux grands angles, la séparatrice, et les zones d'états libres.
- On peut remarquer un certain nombre de propriétés:
  - Reversibilité : La symétrie du portrait de phase par rapport à l'axe des abscisses nous indique qu'en utilisant des vitesses opposées, on repasse par les mêmes points, on en déduit donc que le système est le même par renversement du temps
  - Déterminisme mécanique : On constate que les trajectoires ne se coupent pas. En effet, l'équation différentielle et un set de conditions initiales assurent une trajectoire unique
  - "Point attracteur" : On remarque que dans les états liés "orbitent" autour d'un point d'équilibre stable. D'ailleurs, si on rajoute de la dissipation, on finirait par s'écraser sur un de ces points.

## 2 Génération d'harmonique

### 2.1 Le pendule aux grands angles [1] p.170, [8] p.451

- Développer le sinus à l'ordre trois. Poser l'équation différentielle
- Démontrer la formule de Borda par une méthode des perturbations
- Perte de l'isochronisme
- Faire émerger, par exemple d'un développement en série de Fourier, la présence d'une harmonique à  $3\omega$

### 2.2 Doublage de fréquence optique [6]

- Développer un modèle d'un électron élastiquement lié avec une force de dissipation.
- Modèle de perturbation sur le potentiel avec un terme harmonique en  $x^2$ , un terme plus faible anharmonique en  $x^3$ , et les autres termes seront négligeables.
- Montrer qu'on a l'apparition de fréquences multiples
- Applications au doublage de fréquence optique

## 3 Oscillateur anharmonique

### 3.1 Equation de Duffing

- Partir d'un potentiel puissance 4
- Poser l'équation différentielle en temps
- Montrer la bifurcation en fonction du signe du terme d'ordre 3
- Montrer la tête du potentiel, expliquer quel point est stable en fonction du cas
- Décrire chaque cas en terme de portrait de phase

### 3.2 Réalisation expérimentale

- Montrer tout ça sur la plaquette

## Conclusion

Transition vers le chaos

### Autres exemples (en fonction du sujet):

- Oscillateur de Van der Pol [2], [3], [4]
- Bistabilité optique et effet Kerr [10], [11]
- AO, translation de fréquence par multiplication
- Multivibrateur astable

## Bibliographie

- [1] Pérez, Mécanique
- [2] Gié, Sarmant, BUP 744, Le portrait de phase des oscillateurs
- [3] Michel Krob, Electronique expérimentale : chap 6
- [4] Portelli, Physique par la pratique
  - Partie 5 "Ondes et PNL", p.243-260 pour l'oscillateur de Van der Pol
- [5] Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos
- [6] Modèle pour le doublement de fréquence optique :
  - <https://docplayer.fr/209756713-Oscillateurs-portraits-de-phase-et-non-linear.html>
  - [http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/fiches\\_agreg.pdf](http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/fiches_agreg.pdf)
- [7] Hecht, Optique Chap 13.4 pour le doublement de fréquence optique
- [8] Toute la mécanique L. Bocquet, J'intègre, Dunod
- [9] BFR, Mécanique I et II
- [10] S. Laval. La bistabilité optique. Revue de Physique Appliquée
- [11] Olivier-More-Gié, Tec et Doc PSI/PSI\* : chap 2 pour la bistabilité optique

## Manipulations, ressources

- (1) Portraits de phase du pendule simple et de la tige inclinée avec un ressort :  
"Portraits de phase" sur <https://www.sci-phy.org/agreg>
- (2) MP28 :
  - Oscillateur de Van der Pol et de Duffing (notice des plaquettes)
  - Pendule et générations d'harmoniques
  - Bifurcateur
- (3) Portrait de phase d'un électrocardiogramme :  
[https://www.researchgate.net/figure/Phase-portrait-from-Figure-1b-with-the-addition-of-a-constant-torque-fig4\\_267386000](https://www.researchgate.net/figure/Phase-portrait-from-Figure-1b-with-the-addition-of-a-constant-torque-fig4_267386000)
- (4) Codes Python en vrac :  
<http://www.tangentex.com/BibliothequeCodes.htm#Ind50>