LP24 Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Benjamin Car, Tom Peyrot
M2 FESup physique

Table des matières

Rapports Jury : *"Présenter l'exemple célèbre du pont de Tacoma n'est pas pertinent, sauf s'il s'agit d'effectuer une critique d'une interprétation erronée très répandue. L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon. Le phénomène de résonance ne se limite pas aux oscillateurs à un degré de liberté. Le jury regrette que les cavités résonnantes soient rarement présentées. L'aspect énergétique de la résonance est ignoré la plupart du temps. Trop souvent, la notion même de résonance n'est liée qu'à l'existence d'un maximum d'amplitude. Les applications dans le domaine microscopique sont rarement abordées."*

Le plan de la leçon a plutôt été apprécié par le correcteur. Il m'a manqué quelques minutes sur la fin pour faire proprement la manip que je souhaitais faire. Quelques points restent à éclaircir (essentiellement dûs à la généralisation du phénomène de résonance).

1 Introduction de la leçon

Niveau : L2
Prérequis :
Résonances d'un RLC et diagrammes de Bode
Oscillateurs mécaniques amortis en régime libre
Notions d'interférences en optique
Notions de physique des ondes

Objectifs choisis
▹ Avoir une vision transversale de la résonance : Transfert d'énergie maximal
▹ Résonance d'énergie sur les modes propres d'un système
▹ La sélection en fréquence dépend du facteur de qualité et donc des pertes
▹ Application à l'étude de systèmes microscopiques

2 Plan détaillé

Introduction : Une légende dit que la castafiore, personnage des aventures de Tintin, peut casser du verre à distance. Comment cela est-il possible ?
Manip introductive : Une bobine (excitateur : la castafiore) fait résonner un diapason (résonateur : le verre en cristal). On observe un maximum d'amplitude de la vibration à une certaine fréquence. Ceci est caractéristique d'un phénomène de résonance.
Définition de la résonance donnée en première année : Réponse maximale d'un résonateur sous l'action d'un excitateur.

Dans ce cours, nous allons décrire le phénomène de résonance d'un oscillateur mécanique pour ensuite l'élargir à tous les domaines de la physique. Même si ces résonances sont parfois à éviter, nous verrons qu'elles permettent de caractériser de nombreux systèmes.

Hypothèses générales :
▹ Systèmes linéaires
▹ Régime Permanent
▹ Régime faiblement amorti

2.1 Résonances d'un oscillateur forcé

▶ Résonance d'élongation

(Sur Diapo) Présentation du système ressort, établissement de l'équodiff :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m} \tag{2.1}$$

Soit une excitation sinusoïdale, $F = F_e \cos(\omega t)$. Comme le système est linéaire, l'amplitude est de la forme $z = z_m \cos(\omega t + \psi)$. En insérant cette solution dans l'équodiff, la réponse en amplitude à l'excitation vérifie

$$\underline{z} = \frac{\frac{F}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} \tag{2.2}$$

Cette expression est similaire à la réponse en tension d'un RLC ! (Montrer les plots du Bode sur diapo)

Rappels : Caractéristiques d'une résonance d'élongation :
▹ Uniquement si $Q \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$
▹ à $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

▹ $\psi = -\frac{\pi}{2}$ à résonance

Le décalage en phase caractérise l'inertie du système. Qu'en est-il du décalage de la pulsation propre? Caractérise un couplage avec l'extérieur?

Transition : Il existe aussi une autre façon de voir cette résonance.

▸ Résonance de vitesse

De même $v = v_m \cos(\omega t + \phi)$ et en complexe $\underline{v} = i\omega\underline{x}$. D'où

$$\underline{v} = \frac{\frac{\underline{F}}{\alpha}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{2.3}$$

et donc

$$vm = \frac{\frac{F_e}{\alpha}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \tag{2.4}$$

$$\phi = \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) \tag{2.5}$$

Formule analogue à la résonance d'intensité d'un RLC. On retrouve donc les mêmes caractéristiques. (Plots sur diapo)

Caractéristiques d'une résonance de vitesse :

▹ Quel que soit Q

▹ Maximum pour $\omega = \omega_0$ (mode propre du système)

▹ $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

▹ $\phi = 0$ à résonance

Diapo résumant l'analogie RLC/ressort avec ordres de grandeur des facteurs de qualité dans ces deux systèmes.

Elec : Circuit L=1mH, C=1nF, R=10Ω -> $Q = 100$

Méca : Voiture m=2tonnes, k=20000 N/m, $\alpha = 5000$ kg/s -> Q=1,3 et $\omega_0 = 3$ (Trous espacés de 2s ... peu de risque de résonance)

Transition : L'analogie entre ces deux systèmes est-elle fortuite ?

▸ Résonance de puissance

Appliquons le théorème de la puissance mécanique au ressort :

$$\frac{dEm}{dt} = Fv - \alpha v^2 \tag{2.6}$$

En régime permanent

$$\left\langle \frac{dEm}{dt} \right\rangle_T = 0 \Leftrightarrow P_t =< \alpha v^2 >= \frac{\alpha v_m}{2} \tag{2.7}$$

La puissance transmise au système est donc de la forme

$$P_t = \frac{\frac{F_e^2}{\alpha}}{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \tag{2.8}$$

Cette puissante est maximale pour $\omega = \omega_0$, il y a alors résonance de puissance. Ceci est aussi vrai pour le RLC et tous les oscillateurs, on en déduit une nouvelle définition du phénomène de résonance : La résonance correspond au maximum de puissance transmise au résonateur, lorsque l'apport d'énergie se fait à ω_0, fréquence propre du système.

Que ce passe-t-il pour des systèmes plus complexes ? Un système de quatre oscillateur couplés présente quatre modes propres et aura donc quatre fréquences de résonances (Animation). Si ce nombre de degré de liberté augmente jusqu'à tendre vers l'infini, le milieu pouvant être décrit de manière continue, que ce passe-t-il ? Autrement dit, existe-t-il des résonances pour des phénomènes ondulatoires ?

2.2 Cavité résonantes

▶ Transmission d'une cavité Fabry-Pérot

Soit un laser (excitateur) envoyé entre deux miroirs plans parallèles (résonateur). Ces derniers forment une cavité linéaire de longueur L dont les coefficients de réflexion et transmission en amplitude r et t sont identiques. (Schéma Diapo)
Hyp : Conservation de l'énergie $r^2 + t^2 = 1$.

La somme des vibrations lumineuses génère des interférences (par division d'amplitude). Le déphasage entre chaque onde transmise vaut $\phi = k \times 2L = \frac{2\omega L}{c}$ (si $\theta = 0$) pour un aller retour. La somme géométrique de ces vibrations conduit à

$$\underline{s}_t = \frac{t^2\, \underline{s}_i\, e^{i\frac{\phi}{2}}}{1 - r^2\, e^{i\phi}} \tag{2.9}$$

Comme on suppose que ces ondes sont planes : $P_t = S \times < I_t >= \varepsilon_0 c\, S\, |\underline{s}_t|^2$
d'où

$$P_t = \frac{P_i}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2(\frac{\phi}{2})} \tag{2.10}$$

Cette puissance transmise présente-elle aussi des résonances ?

▶ Résonance modale

Une résonance correspond au maximum de puissance transmise : P_t max si $\phi = 2p\pi$ d'où

$$\omega_p = \frac{\pi p c}{L} \tag{2.11}$$

Les conditions aux limites génèrent une onde stationnaire et imposent un nombre discret de résonances : " Modes de résonance " (nombre fini car pertes et non linéarités)
Vision interférentielle à N ondes de la résonance : Modes très piqués là où se fait l'interférence constructive.
Dessiner la forme des résonances et introduire l'ISL : $\delta\omega = \frac{\pi c}{L}$.

Animation : Moins il y a de pertes, plus les résonances sont fines (même caractéristique que pour les oscillateurs)

Bonus : A faire si le temps est suffisant (laisser bien 7 min pour la suite)

La largeur à mi-hauteur des résonances est ici telle que $\Delta\phi = 2\arcsin(\frac{1-r^2}{2r}) \approx \frac{1-r^2}{r}$ et donc

$$\Delta\omega = \delta\omega \times \frac{1 - r^2}{\pi r} \tag{2.12}$$

On définit la finesse $F = \frac{\delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\pi r}{1-r^2}$.

Lien au facteur de qualité : $Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = F\frac{\omega}{\delta\omega}$
Problème : dépend du mode et souvent très élevé ($\approx 10^7$).
Moins la cavité a de pertes, plus les résonances sont piquées : Forte sélection fréquentielle.

Ordre de grandeur :
Laser He-Ne r=0.97 -> F=50
L=10cm -> ISL : 2π x 3GHz Donc $\Delta\omega \approx 2\pi 60$ MHz
Pour $\lambda = 630$ nm on trouve alors Q=10^7 ! Grande sélectivité mais nombre très élevé dépendant du mode (peu pratique)
Application au laser : Monochromatiques ($\approx$ MHz)

Remarque : Notion généralisable en 3D avec les caisses de résonance acoustiques.

Les résonances des phénomènes ondulatoires en cavité ont des propriétés analogues à celles des oscillateurs : Puissance transmise maximale quand l'excitation se fait sur les modes propres du résonateur et largeur directement liés au facteur de qualité (et donc aux pertes).

2.3 Application à l'étude de la matière

▶ Retour sur l'expérience introductive

But : Utiliser les propriétés du phénomène de résonance pour caractériser un système à priori complexe : le diapason.

On envoie un courant alternatif d'environ un ampère dans la bobine. Celle-ci créé un champ B variable que l'on canalise au voisinage du haut du diapason, grâce à un noyau de fer doux. La force exercée est en B^2 ($E = \mu H = \chi B^2$ car le moment magnétique est induit) donc la réponse est deux fois plus rapide que l'excitation. Les vibrations du diapason se transmettent à l'air de la caisse de résonance et on utilise un micro à électret sensible à la surpression engendrée. On suppose que tension fournie par ce micro est l'image linéaire des oscillations du diapason.

Manip : On peut donc prendre quelques point autour de la résonance et utiliser le modèle le plus simple que nous ayons construit pour faire un ajustement : celui de la résonance d'élongation.
Ce modèle fonctionne et on peut extraire de l'ajustement $\omega_0 = 2\pi \times 440, 26 \pm 0.05Hz$ et $Q = 3500 \pm 150$.
L'incertitude sur Q est donnée par une minimisation des moindres carrés et celle sur ω_0 est essentiellement due à l'écart entre les points de mesure.
Ces valeurs sont cohérentes avec celles attendues mais il faut néanmoins rester critique envers l'ajustement simpliste utilisé.

Transition : Les résonances de systèmes complexes peuvent être ajustées par des modèles simples afin de les caractériser.

▶ Caractérisation des systèmes microscopiques

(Rapidement sur diapo)
Envoyer un laser (excitateur) sur des niveaux d'énergie (résonateur) conduit un absorption présentant des maxima de forme Lorentzienne. De la même manière que précédemment, les fréquences de ces résonances renseignent sur l'écart d'énergie entre les niveaux (application : spectroscopie) tandis que leur largeur renseigne sur les pertes (application : dynamique des systèmes).

Conclusion Le phénomène de résonance caractérise un transfert optimal d'énergie entre un excitateur et un résonateur, que le système soit un ensemble d'oscillateurs ou une onde en cavité. Tous les modèles effectués dans cette leçon ne prennent pas en compte les effets non-linéaires. Ceux-ci apparaissent quand la puissance devient importante et ils tendent à limiter l'amplitude des résonances. C'est donc pour cela que vous aurez beau chanter, vous ne casserez jamais de verres ...

3 Pour préparer

3.1 Justification choix pédagogiques

- Elargir petit à petit la notion de résonance d'un cas particulier connu
- Je souhaite prendre pour acquis les résonances du RLC vues en première année (sinon leçon peu cohérente ou un peu vide)
- Trouver un fil rouge avec la manip d'intro, sans que celui-ci n'apparaisse dans le corps du cours (juste en transition)
- Insister sur la vision énergétique, présenter une cavité parler rapidement de résonance micro (conformément aux attentes du jury)

3.2 Biblio

- Boulomié chap 8 p.176 (oscillateurs méca)
- Brasselet Chap 4 p.93 (oscillateurs méca : Aspects énergétiques)
- Olivier Chap 4 p.135 (Corde de Melde et résonances d'un milieu continu)
- site femto physics

3.3 Animations, illustrations et expériences possibles

- Exp : Mise en résonance d'un diapason par un autre diapason (Quaranta Méca p.272), Qualitatif ! - Exp : Mise en résonance d'un diapason par un champ magnétique
- Exp : RLC, Ressort avec électrodes dans une solution (Manip classiques cf montages "Résonance")
- Exp : Corde de Melde, Cavité confocale, résonateur de Helmoltz (micro dans bière) (Manip classiques cf montages "Résonance")

Animation oscillateurs couplés (Lien)
Animation Fabry-Pérot (Lien)

3.4 Questions posées

▹ Fréquence de résonance du verre ? Fortement dépendant de sa géométrie mais de l'ordre du kHz.
▹ Pourquoi parler de la résonance en puissance ? Seule façon de généraliser le phénomène de résonance
▹ L'interférence à N ondes d'un réseau génère-t-elle des résonances ? Non car il n'y a pas de cavité permettant l'établissement d'une onde stationnaire.
▹ La puissance transmise PAR le FP ne verifie pas ma définition de la résonance ? C'est aussi celle transmise AU FP (facteur t^2 près ? ou voir démo de Yann sur le sujet montrant que c'est un petit peu plus complexe ...)
▹ Pourquoi ne parle-t-on pas de Q pour le FP ? Peu pratique car très grand et dépend du mode considéré.
▹ Quel Q pour une chaine d'oscillateur ? Encore une fois, cela dépend du mode considéré
▹ Comment caractériser un mode propre ? Envoyer un dirac et étudier la TF (méthode de la réponse impulsionnelle)
▹ Comment éviter les résonances acoustiques ? Introduire des pertes, décaler la fréquence de résonance ou utiliser des phénomènes NL
▹ Quand recherche-t-on les résonances ? Laser, montre à quartz, caisses de résonances ...
▹ Lien résonances et marées ? Marées semi-diurnes dues aux forces de marée mais amplitudes importantes dues à la forme de la mer (les marées sont plus souvent diurnes ailleurs sur la planète).

3.5 Notions liées, en vrac

▹ Autres choix possibles : Résonateur de Helmoltz, électron élastiquement lié, chaine d'oscillateurs couplés (phonons) ...
▹ Onde stationnaire : résonante uniquement si on choisit L (ou f) telle que les CL soient satisfaites.
▹ Attention hauteur résonances : Infinies si OH ou ondes, finies si 1D et dissipation ou non-linéarités si ondes.
▹ Résonateur de Helmoltz ($\lambda \approx$ dimension) différent des cavités (λ « dimension) : Mouvement en bloc du fluide.
▹ Synthèse modale : Calcul des séries de Fourier, déformées modales (allure de différents modes) ... Trouver Ref de vibrations !
▹ système gouverné par : masse (wp<w), amortissement (wp w0), raideur (wp>w0)
▹ Condition de résonance confocale ? Etudier le déphasage des modes HG(xyz) ou LG(rθz)
▹ Vision énergétique de $Q = \frac{2\pi \text{Energie système}}{\text{Energie dissipée par période}}$, j'ai du mal à l'interpréter .. (démo ok avec ressort)
▹ Quartz : Piezo à très grand facteur de qualité $Q \approx 10^5$.
▹ Microphone à électret : Condensateur à plaque mobile. Electret : polarisation naturelle (equivalent aimant)
▹ Lorentzienne : $\frac{1}{1+\left(fracx\frac{Delta}{2}\right)^2}$
▹ Résonance orbitale : quand deux astres ont un rapport de période rationnel (stable ex : Pluton Neptune) (Si trois corps Laplace)
▹ Résonance spin-orbite : Si rapport rationnel période de rotation propre et révolution (synchrone ex : Terre-Lune)
▹ Pour la compréhension du décalage de la résonance d'amplitude : voir PbC 2009 !