LP Filtrage optique

Cassandra Dailledouze

Niveau : L3

Prérequis :

- Principe de Huygens-Fresnel, régimes de diffraction, diffraction de Fraunhofer
- Transformée de Fourier, produit de convolution
- Filtrage en électronique

Introduction

Historique sur l'expérience d'Ernst Abbe (1866) [Houard p.332] Il cherche comment augmenter la résolution d'un microscope optique, c'est-à-dire sa capacité à montrer les détails fins. Il étudie alors le rôle de la diffraction dans la formation des images. Il constate que le pouvoir de résolution d'un microscope est amélioré si l'angle de demi-ouverture u du faisceau incident sur l'objectif est augmenté et introduit l'OUVERTURE NUMERIQUE $\omega = nsin(u)$. On se demande alors pourquoi l'ouverture numérique influe sur la résolution des images (sur leur netteté) ? La réponse à cette question fait intervenir la notion de filtrage optique des images et c'est ce que nous allons essayer de caractériser dans cette leçon. Grâce aux outils développés ici, nous allons pouvoir comprendre les conclusions faites par ce physicien.

1 Optique de Fourier

Avant tout il s'agit de comprendre que le filtrage concerne ici, comme on a l'habitude de le voir en électronique, la sélection de certaines fréquences. Cependant, on sait pas encore de quelles fréquences on parle ici. On va voir que le phénomène de diffraction donne lieu à des fréquences spatiales : lorsque une source émet de la lumière à travers un objet diffractant, l'amplitude de l'onde diffractée représente le spectre de ces fréquences spatiales.

1.1 Fréquences spatiales

Diffraction de Fraunhofer (diffraction en champ lointain)

Montage Diffraction de Fraunhofer exacte avec deux lentilles

On s'intéresse à l'amplitude lumineuse observée dans un plan orthogonal à l'axe optique dans lequel on place un écran après diffraction par un objet plan, orthogonal à l'axe optique. La première lentille forme un faisceau parrallèle qui éclaire l'objet diffractant. L'objet diffractant agit sur la lumière incidente et diffracte les rayons. La deuxième lentille fait converger ce faisceau parallèle sur un écran.

Le plan de l'objet diffractant (OD) est décrit par les coordonnées (X,Y) et le plan d'observation par les coordonnées (x,y). On définit D_S la distance entre la source et l'OD et D la distance entre l'OD et l'écran. $\mathcal{F} = \frac{a^2}{\lambda}(\frac{1}{D_S} + \frac{1}{D})$ avec a l'extension maximale de l'objet diffractant. [Physique expérimentale p.321]

Or, $\frac{1}{D_S} = 0$ car courbure des rayons incidents sur l'OD et $\frac{1}{D} = 0$ car courbure des rayons émergents de l'OD.

Donc $\mathcal{F} = 0$.Le régime de diffraction dans lequel on se place ici est donc de la diffraction de Fraunhofer exacte.

Recherche de l'amplitude de l'onde diffractée sur l'écran en $M(x, y)$:

L'objet diffractant est décrit par une transmittance complexe $\underline{t}(X, Y) = t(X, Y)e^{i\theta(X,Y)}$ avec $|t(X, Y)| < 1$ tel que l'amplitude lumineuse $\Psi_{après}(X, Y)$ juste après l'objet diffractant soit reliée à l'amplitude lumineuse juste avant l'objet $\Psi_{avant}(X, Y)$ par : $\Psi_{après}(X, Y) = \underline{t}(X, Y)\Psi_{avant}(X, Y)$.

L'amplitude totale de l'onde diffractée par un objet de transmittance $\underline{t}(X, Y)$ est, en appliquant le principe de Huygens Fresnel dans le cas de la diffraction de Fraunhofer exacte :

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 \iint_{(OD)} t(X, Y)e^{2i\pi(f_x X + f_y Y)}dXdY$$

où $f_x = \frac{sin(\theta_x)}{\lambda} = \frac{\theta_x}{\lambda} = \frac{x}{\lambda f_2}$ car θ_x est l'angle qui repère la direction d'observation et la figure de diffraction est dans le plan focal de (L_2) et $f_y = \frac{y}{\lambda f_2}$. f_x et f_y sont les FREQUENCES SPATIALES.

L'ouverture diffractante étant finie, sa transmittance est à support borné donc les bornes de l'intégrale peuvent être remplacés par $-\infty$ et $+\infty$.

Rappels : Transformée de Fourier

On a alors

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 TF[\underline{t}](f_x, fy) = \Psi_0 TF[\underline{t}](\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2})$$

Plan de Fourier : plan (xOy)

L'amplitude de l'onde diffractée représente donc le spectre des fréquences spatiales qui décrivent via la transmittance $\underline{t}$ la structure de l'objet diffractant.

Le SPECTRE DES FREQUENCES SPATIALES contient toute l'information nécessaire à décrire l'objet diffractant.Si on revient à l'idée de faire un filtrage des fréquences optiques, on a donc l'intuition qu'il s'agit de réaliser ce filtrage sur ce spectre et donc agir dans le plan de Fourier.

Avant ça on va essayer d'illustrer notre propos et de visualiser un spectre de fréquences spatiales sur un exemple particulier.

1.2 Diffraction par une ouverture rectangulaire

Montage Schéma de l'ouverture diffractante rectangulaire

On considère une ouverture de longueur a selon (OX) et de largeur b selon (OY).

$\underline{t}(X, Y) = 1$ pour $X \in [-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$ et $Y \in [-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$ et 0 en dehors. [Taillet p.133]

$$\Psi(x,y) = \Psi_0(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2i\pi f_x X} dX)(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{2i\pi f_y Y} dY) = \Psi_0 absinc(\pi f_x a)sinc(\pi f_y b)$$

On montre ensuite qu'il est plus rapide et direct d'utiliser l'outil transformée de Fourier pour trouver Ψ.

Rappels Transformée de Fourier d'une fonction Rectangle

Or, on peut voir que $\underline{t}(X,Y) = Rect_a(X) * Rect_b(Y)$.

Rappels Produit de convolution

Application à l'ouverture rectangulaire

Ce calcul montre que l'on retrouve bien ce que l'on voulait.

Cependant, ce à quoi l'oeil est plutôt sensible est un éclairement et non une amplitude lumineuse, on le calcule donc :

$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 sinc(\pi f_x a)^2 sinc(\pi f_y b)^2$

Ce dernier s'annule si $\pi f_x a = n\pi$ soit $f_x = \frac{n}{a}$avec n un entier relatif non nul et par analogie,$f_y = \frac{m}{b}$.

Figure de diffraction dans le plan de Fourier (Manip). [Houard p.314]

Tout ceci est bien sympathique, mais on a toujours pas réaliser de filtrage optique. On sait que l'on doit agir sur le spectre des fréquences spatiales mais de quelle façon ? Comment couper des fréquences ? Il va s'agir ici de placer des masques qui transformeront l'image en jouant directement sur leur TF.

2 Filtrage spatial des images

On se demande quelle va être la réponse du système à l'application d'un filtre spatial.

2.1 Filtre spatial

On va donc ici réaliser une opération de FILTRAGE LINEAIRE : placer un objet partiellement transparent appelé FILTRE SPATIAL dans le plan de Fourier. En masquant certaines parties du spectre fréquentiel, on filtrera ainsi l'image de l'objet diffractant.

Montage 4f de filtrage spatial [TD Timothée OO n°1]

On retrouve au début le montage étudié précédemment, c'est-à-dire celui avec les lentilles L_1 et L_2. On appelle ce montage ainsi car on place une troisième lentille L_3 de même distance focale que $f_2 = f$ et donc la distance f se répète 4 fois dans le montage.

Bilan de ce qui a été vu jusque là sur les différents plans. Désormais, on va étudier l'amplitude de l'onde lumineuse dans le plan image repéré par les coordonnées (X', Y').

$$\Psi_{PF}(x,y) = \Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(X,Y)e^{2i\pi(f_x X + f_y Y)} dXdY = \Psi_0 TF[\underline{t}](f_x, fy)$$

Or dans le plan de Fourier un nouvel objet diffuse la lumière, on peut donc refaire l'opération de TF sur $\Psi_{PF}(x,y)$ soit :

$$\Psi_{IM}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{PF}(x,y)e^{2i\pi(f_{X'}x + f_{Y'}y)} dxdy = TF[\Psi_{PF}](f_{X'}, f_{Y'})$$

$$\Psi_{IM}(x,y) = \Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(X,Y)dXdY \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(\frac{x}{\lambda f}(X+X')+\frac{y}{\lambda f}(Y+Y'))}dxdy$$

$$\Psi_{IM}(x,y) = \Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(X,Y)dXdY\delta(X+X')\delta(Y+Y') = \Psi_0\underline{t}(-X',-Y')$$

Montage 4f de filtrage spatial image renversée

On peut voir que l'on retrouve totalement l'image de l'objet diffractant mais renversée dans le plan image (X'O'Y').

Appliquons désormais un filtre spatial dans le plan de Fourier, c'est-à-dire un deuxième objet diffractant de transmittance connue $\tau(x,y)$

L'amplitude de l'onde diffractée dans le plan de Fourier devient alors :

$$\Psi_{PF}(x,y) = \Psi_0\tau(x,y)TF[t](f_x,f_y)$$

avec $\tau(x,y)$ la fonction de transfert du filtre dans l'espace des fréquences spatiales.

On retrouve alors l'amplitude filtrée de l'onde dans le plan image (en faisant la transformée de Fourier de celle dans le plan de Fourier et en appliquant les propriétés sur le produit de convolution) qui est l'image renversée et modifiée par le facteur $TF[\tau](f_{X'},f_{Y'})$.

2.2 Filtrage passe bas

Si on regarde l'expression des fréquences spatiales, $f_x = \frac{x}{\lambda f}$ et $f_y = \frac{y}{\lambda f}$.On comprend donc que les basses fréquences correspondent ici aux petites positions et donc au centre de l'image.

On place une ouverture au centre du plan de Fourier qui ne laisse donc passer que les basses fréquences spatiales, inférieures à une pulsation de coupure (qui correspond aux bordures de l'ouverture).Cela permet de supprimer les variations à petite échelle de l'image c'est-à-dire les détails fins.

(image ouverture quelconque dans un carré)

Applications :

- Retour sur l'expérience d'Abbe [Houard p.334] Pour restituer fidèlement l'image d'un objet, il est indispensable de conserver l'intégralité de son spectre de Fourier. Si des harmoniques d'ordre supérieur sont absents, l'image possèdera une résolution spatiale limitée.

  Dans le cas du microscope, la grille est remplacée par la lame échantillon (objet diffusif) et la lentille par l'objectif du microscope. Les détails de l'échantillon les plus fins sont associés aux rayons diffractés dans les directions angulaires les plus élevées. Si ces rayons ne peuvent pas pénétrer dans l'objectif, il s'ensuit une perte de résolution spatiale. Le pouvoir de résolution du microscope est donc lié à son ouverture numérique $\omega = nsin(u)$ d'où l'angle de demi ouverture u doit être grand.

- Détramage des photographies Filtrage passe bas Détramage d'une image [Taillet p.152]

  Avant l'avènement des technologies numériques, sur certains tirages anciens ou très agrangies, la trame de la photographie, constituée d'un réseau régulier de points ou de carrés noirs est visible et nuit à l'aspect esthétique des images. On réalisait alors un filtrage passe bas pour nettoyer les images. Lorsque l'on ajoute un filtre constitué d'une ouverture rectangulaire verticale, seules les modulations verticales (c'est-à-dire des traits horizontaux) sont visibles.

Le raisonnement et les résultats sont similaires avec une ouverture horizontale. Ce nettoyage des images s'accompagne cependant d'une perte notable de résolution spatiale.

2.3 Filtrage passe haut

Filtrage passe haut : Strioscopie [Houard p.335]

STRIOSCOPIE : On peut au contraire éliminer les basses fréquences en plaçant un petit disque opaque au centre du plan de Fourier.(image trou opaque quelconque dans un carré)Cette fois ci ce sont les variations de luminosité sur les grandes échelles qui sont atténuées mais pas les détails fins. On peut ainsi améliorer sensiblement la visibilité des détails sur un fond uniformément éclairé.

2.4 Microscopie à contraste de phase

On place dans le plan de Fourier une pastille transparente d'indice n et d'épaisseur e qui induit un déphasage $\delta\phi = \frac{2\pi ne}{\lambda}$ soit $\tau(x,y) = e^{i\delta\phi}$. Alors, $\Psi_{PF} = \Psi_0 e^{i\delta\phi} TF[t](f_x, f_y)$ avec $\delta\phi$ un déphasage faible introduit par l'objet transparent dont on veut faire l'image, soit $\Psi_{PF} = \Psi_0(1 + i\delta\phi)TF[t](f_x, f_y)$. D'où, $\Psi_{IM}(x,y) = \Psi_0 \underline{t}(-X', -Y') * TF1 + i\delta\phi$.

Or l'objet de phase est choisi (on s'arrange pour cela en plaçant une lame quart d'onde) tel que $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$, soit $\tau(x,y) = i$.

$\Psi_{IM}(x,y) = \Psi_0 \underline{t}(-X', -Y') * 2\delta(\frac{X'}{\lambda f}, \frac{Y'}{\lambda f})$. Alors, les varaitions de phase deviennent des variations d'amplitude que l'on peut distinguer facilement.

Microscopie à contraste de phase : cellules des joues [Taillet p.154]

3 Conclusion

Analogie avec l'électronique

Remarques

Il faut être très au point sur le microscope ici.

Bibliograhie

- Taillet, Optique physique, Chapitre 5 Diffraction
- Houard, Optique Une approche expérimentale et pratique, 7-Instruments d'optique, 10-Diffraction
- Physique expérimentale, Fruchard, Lidon, Thibierge, Champion, Le Diffon, III.9 Diffraction de Fraunhofer et optique de Fourier
- Sextant, III.1.6