

LP 28 : Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

Armel JOUAN, Géraud DUPUY

Niveau : L3

Prérequis :

- Ondes électromagnétiques dans le vide et les métaux
- Notions sur les milieux diélectriques

Introduction

Les milieux diélectriques sont souvent associés aux propriétés isolantes de la matière (à titre d'indication, $\sigma_{cuivre} \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ alors que $\sigma_{verre} \sim 10^{-17} \text{ S.m}^{-1}$). Ils présentent de fait des propriétés optiques différentes de celle des conducteurs, que nous allons mettre en évidence à l'aide de l'expérience suivante : on éclaire un prisme à vision directe en lumière blanche, et on observe le spectre de la lumière blanche, mettant ainsi en évidence le phénomène de dispersion. On place ensuite une cuve remplie d'une solution de permanganate de potassium (à $4 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L}$, *ça marche bien*) avant le prisme, et on observe qu'une partie du spectre disparaît à l'écran : c'est le phénomène d'absorption.

Dans la suite de cette leçon, nous expliquerons ces propriétés optiques singulières, en reliant la propagation d'une onde dans un milieu diélectrique à une modélisation microscopique simple de ce dernier.

Pour l'expérience, il est astucieux de remplir la cuve de moitié, afin d'observer simultanément les deux spectres (absorbé et non absorbé). Un schéma de la dispersion dans le prisme est le bienvenu, de même pour l'absorption dans la cuve.

1 Propagation dans un milieu diélectrique

1.1 Position du problème

La réponse d'un milieu diélectrique à une sollicitation \vec{E} est la polarisation \vec{P} , qui correspond à une densité volumique de dipôles électriques : $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$

Hypothèses sur le milieu :

- linéaire : relation linéaire entre \vec{P} et \vec{E}
- homogène : réponse identique en tout point du milieu
- isotrope : réponse identique dans toutes les directions de l'espace

On parlera dans la suite de **MDLHI**.

On en déduit une relation de la forme :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

où χ_e est la susceptibilité diélectrique du matériau, qui en caractérise donc la réponse. On peut ainsi réécrire le vecteur induction électrique :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

où on fait apparaître la permittivité diélectrique relative du matériau :

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ est la relation constitutive du matériau.

1.2 Relation de dispersion

Dans le cas où $\rho_{libre} = 0$ et $\vec{j}_{libre} = \vec{0}$, les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} div(\vec{D}) = 0 \\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div(\vec{B}) = 0 \\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

En injectant la relation constitutive $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$, on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On remarque que ces équations sont tout à fait analogues à celles obtenues dans le vide, à ϵ_r près. On en déduit l'équation de propagation pour le champ \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Pour une solution harmonique, (qu'on considèrera, sans perte de généralités, se propageant dans le sens des z croissants) de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[kz - \omega t]}$$

On obtient alors la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2(\omega) = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Cette relation est donc similaire à celle obtenue pour le vide, à ϵ_r près.

Je n'ai pas développé l'essentiel des calculs au tableau, mais sur diapo, considérant qu'on pouvait fonctionner par analogie avec les OEM dans le vide que j'avais placées dans les prérequis, souhaitant plutôt développer les calculs pour l'électron élastiquement lié dans la 2e partie.

Il est toutefois plus apprécié de prendre le temps de développer les premiers calculs. On pourrait donc plutôt développer l'obtention de la relation de dispersion, et aller plus vite sur l'électron élastiquement lié en mettant bien en évidence qu'on se ramène à un oscillateur harmonique amorti forcé.

1.3 Discussion sur ϵ_r

ϵ_r caractérise la réponse du milieu à une excitation et donc ses propriétés optiques. On peut d'ailleurs le relier à l'indice optique du milieu :

$$\boxed{n^2 = \epsilon_r}$$

Attention, la relation $v_\phi = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_r}$ n'est valable que dans le cas d'un milieu non absorbant (ϵ_r et n réels), et on définit donc pour un milieu absorbant un indice complexe de manière analogue. Cf chapitre 9.2 du BFR pour le détail.

Bien que les équations de Maxwell ne permettent pas de déterminer la forme de ϵ_r , on peut déjà s'attendre à ce que :

- ϵ_r dépende de la pulsation excitatrice ω : comme pour de nombreuses autres situations physiques (électrocinétique, mécanique), on s'attend à ce que la réponse du milieu diffère en fonction de la fréquence de la sollicitation.
- ϵ_r soit complexe, ce qui caractériserait le retard de phase que le système prendrait par rapport à l'excitation.

Bien insister sur les arguments physiques permettant la discussion sur la forme attendue de ϵ_r : c'est le cœur de la leçon.

On s'attend donc à un indice optique complexe de la forme :

$$\underline{n}(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$$

Et donc, d'après la relation de dispersion :

$$\boxed{k(\omega) = \frac{\omega}{c}(n'(\omega) + in''(\omega))}$$

L'onde se propageant dans le milieu prend donc la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-\frac{\omega}{c}n''(\omega)z}}_{\text{absorption}} \underbrace{e^{i[\frac{\omega}{c}n'(\omega)z - \omega t]}}_{\text{dispersion}}$$

J'avais fait ce retour au vecteur d'onde et à la forme de l'onde dans le milieu dans la 3e partie, voire même en conclusion, ce qui m'a été reproché.

Transition didactique : On va à présent s'atteler à déterminer la forme de ϵ_r en s'appuyant sur une modélisation microscopique du milieu.

2 Modélisation microscopique du milieu

2.1 Origines de la polarisation

Il existe différentes origines à la polarisation :

- polarisation ionique
- polarisation d'orientation
- polarisation électronique

Dans la suite, on s'intéressera uniquement à la polarisation électronique.

J'ai peu développé à l'oral le principe des différentes polarisations, le correcteur y est revenu pendant la phase de questions. J'avais préparé une diapo annexe donnant les domaines fréquentiels liés à chaque polarisation.

2.2 Modèle de l'électron élastiquement lié

Faire un schéma de la situation : le nuage électronique de charge $-Ze$ (sphère de volume V) déplacé de $\vec{l}(t)$ par rapport au noyau. On fait un bilan des forces s'exerçant sur le nuage électronique :

- Le noyau exerce une force de rappel électrostatique de la forme : $\vec{f}_{el} = -\frac{Ze^2}{3\epsilon_0 V} \vec{l}(t)$
- Pour tenir compte des phénomènes dissipatifs (rayonnement d'énergie par les charges accélérées), on introduit une force de frottement fluide : $\vec{f}_f = -\frac{Zm_e}{\tau} \frac{d\vec{l}(t)}{dt}$ où τ correspond à un temps caractéristique de retour à la position d'équilibre.
- On considère de plus un champ électrique extérieur : $\vec{f}_e = -Ze\vec{E}(t)$

On fait intervenir le dipôle électrique $\vec{p}(t) = -Ze \times \vec{l}(t)$. Par application du PFD au nuage électronique, en notant $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{3\epsilon_0 V m_e}$ et $Q = \omega_0 \tau$:

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{Ze^2}{m_e} \vec{E}(t)$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur amorti forcé. En régime harmonique, en se plaçant dans l'approximation quasi-statique (ie. $\lambda \gg$ taille caractéristique atome $\sim \text{\AA}$, bien vérifié pour des fréquences optiques - id. ARQS en électrocinétique), on peut considérer que $\vec{E}_\omega = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ et de même $\vec{p}_\omega = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$, et on obtient alors, en posant $\alpha_0 = 3V$:

$$\boxed{\vec{p}_\omega = \epsilon_0 \times \frac{\alpha_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 - \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \times \vec{E}_\omega}$$

J'avais introduit lors de mon passage la polarisabilité $\alpha(\omega)$, définie par :

$$\vec{p}_\omega = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}_\omega$$

ce qui n'apporte rien de particulier ici à la discussion.

Pour justifier de l'expression de ces forces, on peut utiliser utiliser les arguments quantiques suivants (cf [2]):

- **Pour la force de rappel électrostatique :** comme on est proche d'une position d'équilibre, on peut approximer le potentiel d'interaction nuage-noyau par un potentiel harmonique, dont on dérive donc une force de rappel.
- **Pour la force de frottement fluide,** on peut relier τ à la durée de vie de l'état excité, et le facteur de qualité Q à la largeur spectrale de la transition énergétique : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Le lien entre $\Delta\omega$ et τ est donné par les propriétés de la TF.

Transition didactique : On a introduit un modèle microscopique simple, qui nous a permis de nous ramener au cas bien connu de l'oscillateur harmonique amorti forcé. On va pouvoir désormais revenir à l'expression de l'indice optique à partir des résultats obtenus avec ce modèle.

3 Propriétés optiques

3.1 Indice optique

En revenant à la définition de la polarisation comme une densité de dipôles, on a :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = N \vec{p}$$

Où N est la densité volumique de dipôles électroniques (ie. la densité volumique d'atomes). Et on déduit ainsi que :

$$\chi_e(\omega) = \frac{N\alpha_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 - \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{N\alpha_0}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 - \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Et donc, en reprenant la forme $\underline{n}(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$, on a, par un développement limité au premier ordre en le terme en $N\alpha_0$, comme $n(\omega) = (\epsilon_r(\omega))^{1/2}$:

$$\begin{cases} n'(\omega) = 1 + \frac{N\alpha_0}{2} \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + \frac{1}{Q^2} (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\ n''(\omega) = \frac{N\alpha_0}{2Q} \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + \frac{1}{Q^2} (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{cases}$$

Sur diapo, les courbes superposées de n' et n'' .

Faire la discussion physique sur les différentes courbes obtenues :

- pour n' : zones de dispersion normale/anormale (n' qui augmente/diminue avec ω), $n' \simeq 1$ pour $\omega \simeq \omega_0$
- pour n'' : zone de transparence loin de ω_0 et d'absorption près de ω_0 sur une largeur $\Delta\omega$ reliée à Q .

Attention au passage de ϵ_r à n par un DL, qu'on justifie dans "l'approximation des milieux dilués" a priori pas vérifiée pour le prisme par exemple. Pour éviter les questions fâcheuses, il vaut sans doute mieux donner les expressions (exactes) de $\epsilon_r'(\omega)$ et $\epsilon_r''(\omega)$ et tracer n' et n'' ; et alors, n'exprimer n que dans les cas bien particuliers des lois de Cauchy et Beer-Lambert, où on peut faire un certain nombre d'approximations.

3.2 Dispersion : loi de Cauchy

Si on travaille à des fréquences optiques, on a $\omega \sim 10^{15} \text{rad.s}^{-1} \ll \omega_0 \sim 10^{17} \text{rad.s}^{-1}$.
On peut alors considérer que :

$$n(\omega) \simeq n'(\omega)$$

On est donc dans la zone de dispersion normale mentionnée plus tôt. Par un développement limité à l'ordre 1 en $(\frac{\omega}{\omega_0})^2$:

$$n(\omega) \simeq A + B\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = A + B'\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Calcul à développer plus ou moins en fonction du temps qu'il reste !

3.3 Absorption : loi de Beer-Lambert

On est cette fois-ci au maximum d'absorption $\omega \simeq \omega_0$: $n' \simeq 1$ et $n''(\omega) \simeq \frac{N\alpha_0 Q}{2} = \text{cste}$.

Par définition : $I(z) = \left\| \vec{E}(z, t) \right\|^2$

Faire un rapide schéma de la cuve.

On a donc :

$$\begin{cases} I_0 = E_0^2 \\ I(l) = I_0 e^{-2 \frac{\omega_0}{c} \frac{N\alpha_0 Q}{2} l} \end{cases}$$

On en déduit l'expression de l'absorbance A :

$$A = -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{N\alpha_0\omega_0 Q}{c \times \ln(10)} \times l$$

On peut relier N à la concentration de la solution $N = N_A \times C$, et on a alors :

$$A = \frac{N_A \alpha_0 \omega_0 Q}{c \times \ln(10)} \times l \times C = \epsilon \times l \times C$$

On retrouve bien la loi de Beer-Lambert.

Conclusion de la leçon

A partir des équations de Maxwell pour un MDLHI et d'une modélisation microscopique simple de celui-ci, on arrive à bien expliquer les propriétés optiques de dispersion et d'absorption des diélectriques qu'on avait mises en évidence expérimentalement.

Critique des choix pédagogiques de la leçon

- J'ai choisi de placer ma leçon au niveau L3 pour pouvoir parler plus en détail des propriétés des diélectriques et de leur modélisation. Au programme de CPGE, cette modélisation n'est pas faite, et sont plutôt abordés des calculs aux interfaces entre deux milieux d'indices complexe (coefficient de transmission, réflexion, forme des ondes, angle de Brewster, etc.). On pourrait ainsi faire une leçon complètement différente si on se plaçait au niveau CPGE.
- Dans le déroulé de la leçon, j'ai voulu tout d'abord mettre en évidence expérimentalement les propriétés optiques des MDLHI, puis articuler la leçon autour de deux noyaux disciplinaires : la propagation de l'onde, où, à partir des équations de Maxwell et l'hypothèse LHI, on établit la relation de dispersion où l'on fait apparaître ϵ_r ; puis la modélisation microscopique qui nous permet d'en préciser la forme ; avant enfin de revenir aux propriétés optiques mises en évidence en introduction, avec une discussion sur les allures de n' et n'' , et le calcul des lois de Cauchy/Beer-Lambert.
- J'ai essayé autant que possible de bien définir le cadre du problème ainsi que les différentes grandeurs que j'ai introduit : on étudie la réponse d'un milieu \vec{P} à une excitation \vec{E} , réponse qui est caractérisée par la susceptibilité χ_e du matériau qui contient les informations sur ses propriétés optiques, puisqu'on peut la relier à l'indice optique.

Expériences illustratives, simulations numériques

- **Expérience illustrative** : en introduction mise en évidence de l'absorption et de la dispersion (cf introduction pour le détail)
- **Simulations numériques** : Tracé des courbes de n' et n'' , simulation animée pour la forme de l'onde se propageant dans le milieu.

Questions/remarques des correcteurs

J'ai déjà intégré plusieurs remarques/questions dans le développement de mon plan, le reste est donc répertorié ici.

- *Ordres de grandeur des fréquences caractéristiques des 3 types de polarisation ?* cf BFR chapitre 4.5 *Explication physique ?* Inertie des dipôles : molécules polaires dans un solvant > ions dans une réseau cristallin > électron autour d'un noyau.
- *Applications de la vie courante ?* Four à micro-ondes où on excite les dipôles des molécules d'eau.
- *Remarques générales :* Bien insister sur les différents arguments physiques (notamment pour la forme de ϵ_r et le modèle de l'électron élastiquement lié). Prendre le temps de bien exploiter en détail les différentes zones des courbes de n' et n'' , et les relier aux propriétés optiques. **Intégrer des ODG et des exemples.**

Bibliographie

- [1] **Gignoux, Diélectriques et autres :** chapitre 5 pour une discussion sur le caractère complexe de ϵ_r , chapitre 6 pour la description des différents mécanismes de polarisation, chapitre 7 pour la relation de dispersion, et les calculs aux interfaces (réflexion, transmission, angle de Brewster) que je n'ai pas abordés dans cette leçon (cf choix pédagogiques).
- [2] **P. Roux, Électromagnétisme :** chapitre 10 pour la description des MDLHI, chapitre 11.3 pour le modèle de l'électron élastiquement lié (où sont justement avancés les arguments quantiques pour l'expression des forces).
- [3] **PUF Mauras, Électromagnétisme :** chapitre 7 sur les milieux matériels où on retrouve tous les points abordés dans la leçon.
- [4] **BFR Électromagnétisme Tome 4 :** chapitres 1 à 4 pour la description des milieux diélectriques et des mécanismes de polarisation, chapitre 9 pour la propagation des ondes.
- [5] **H Prépa Ondes :** chapitre 9