

Conversion de puissance

III — Machine synchrone (2)

1 — Structure d'une machine synchrone à pôles lisses et à excitation séparée

La machine synchrone est un convertisseur électromécanique réversible, pouvant fonctionner en moteur (conversion d'énergie électrique en énergie mécanique) ou en générateur (conversion d'énergie mécanique en énergie électrique).

Du point de vue **mécanique**, une machine synchrone est constituée de deux parties :

le stator qui est la partie extérieure **fixe**, de forme cylindrique. Elle est constituée d'un matériau ferromagnétique doux non saturé, avec $\mu_r \gg 1$;

le rotor qui est la partie **mobile**. C'est un cylindre plein placé à l'intérieur du stator, pouvant avoir un mouvement de rotation autour de son axe. Il peut être constitué d'un aimant permanent (pour les machines de faible puissance), ou d'un milieu ferromagnétique doux non saturé, avec $\mu_r \gg 1$.

Du point de vue **électromagnétique**, la machine est constituée de deux éléments :

l'inducteur qui crée un champ magnétique constant (dans le référentiel lié à l'inducteur). C'est un aimant permanent, ou un circuit bobiné parcouru par un courant permanent (pour une machine bipolaire)

l'induit constitué de deux circuits parcourus par un courant sinusoïdal (pour une machine diphasée).

En mode moteur, l'induit est solidaire du stator et l'inducteur est solidaire du rotor.

Les fils des bobinages sont placés dans des encoches creusées dans les milieux magnétiques, de telle sorte que l'épaisseur de l'entrefer est constante : on parle de **machine à pôles lisses**.

Chaque circuit bobiné sur le stator représente une phase de l'induit. Le schéma ci-contre représente un circuit diphasé (il possède deux bobinages induits C_1 et C_2 parcourus par des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$).

Les circuits du rotor et du stator sont alimentés par des sources distinctes (courant alternatif pour le stator, courant continu pour le rotor) : on parle de **machine à excitation séparée**.

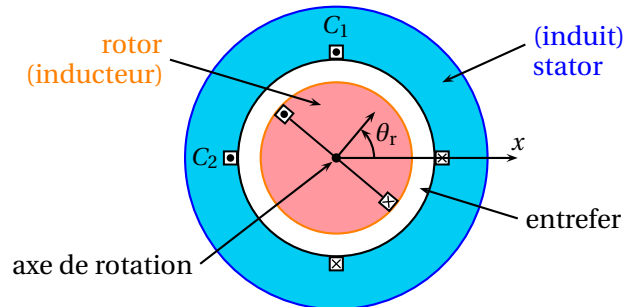


FIGURE 1 – Machine diphasée

2 — Champ magnétique dans l'entrefer

2.1 Champ créé par une spire statorique

On considère une spire passant par deux encoches opposées du stator, parcourue par une intensité $i(t)$.

On se place en coordonnées cylindriques.

Le plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan d'antisymétrie pour les courants² ; le champ magnétique est donc contenu dans ce plan et $B_z = 0$.

La distribution est invariante par translation selon Oz (on néglige les effets de bord), donc les composantes de $\vec{B}$ ne dépendent pas de z . Finalement :

$$\vec{B}(M, t) = B_r(r, \theta, t) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, t) \vec{e}_\theta.$$

Dans le cas $\mu_r \rightarrow \infty$, nous avons vu que les lignes de champ sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer : le champ magnétique est donc radial dans l'entrefer, de la forme

$$\vec{B}(M, t) = B(r, \theta, t) \vec{e}_r.$$

Enfin, l'entrefer est très étroit (épaisseur $e \ll R$, rayon moyen de l'entrefer).

On peut donc négliger les variations du champ magnétique selon r . On arrive à

$$\vec{B}(M, t) = B(\theta, t) \vec{e}_r.$$

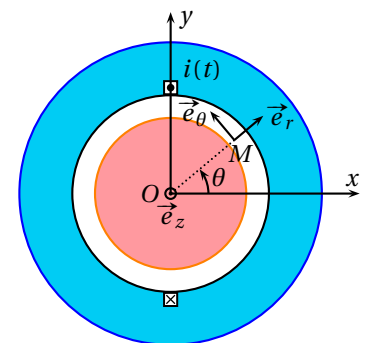


FIGURE 2 – Champ d'une spire statorique

1. On se place dans le cas idéal $\mu_r \rightarrow \infty$.

2. La spire est dans le plan Oyz .

Le plan Oyz , qui contient la spire, est un plan Π de symétrie des courants. En $M' = \text{Sym}_{\Pi}(M)$, on a donc $\vec{B}(M') = -\text{Sym}_{\Pi}[\vec{B}(M)]$. On en déduit pour le champ magnétique dans l'entrefer

$$B(\pi - \theta, t) = -B(\theta, t).$$

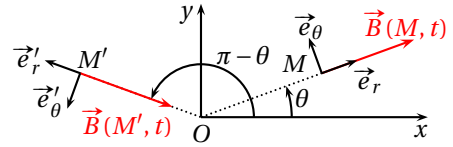


FIGURE 3 – Propriétés de symétrie

Pour calculer le champ magnétique en un point M avec $0 < \theta < \pi/2$, appliquons le théorème d'Ampère le long du contour Γ indiqué sur la figure :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i(t).$$

Décomposons le calcul de la circulation :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

Comme on a considéré $\mu_r \rightarrow \infty$, on a $H = 0$ dans le milieu ferromagnétique, c'est-à-dire sur les chemins CD et EA . Comme dans l'entrefer $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, on obtient en notant R_1 le rayon du rotor et e l'épaisseur de l'entrefer

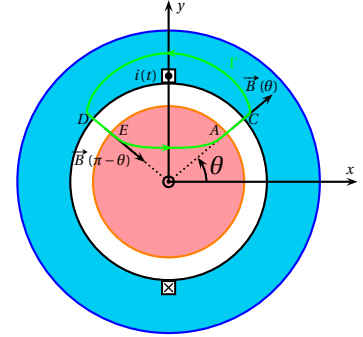


FIGURE 4 – Théorème d'Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_1+e} H(\theta) dr + \int_{R_1+e}^{R_1} H(\pi - \theta) dr = H(\theta)e - H(\pi - \theta)e = 2H(\theta)e = \frac{2B(\theta)e}{\mu_0}.$$

On a donc $B(\theta, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2e}$ pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Compte tenu de la propriété de symétrie établie précédemment, on peut étendre le résultat avec $B(\theta, t) = -\frac{\mu_0 i(t)}{2e}$ pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Pour calculer le champ magnétique dans la partie inférieure ($y < 0$), on peut de nouveau appliquer le théorème d'Ampère avec un contour entourant le fil inférieur, mais un simple argument de symétrie permet de conclure.

Le plan Oxz est un plan Π^* d'antisymétrie pour les courants.

En $M' = \text{Sym}_{\Pi^*}(M)$, on a donc $\vec{B}(M') = \text{Sym}_{\Pi^*}[\vec{B}(M)]$, soit

$$B(-\theta, t) = B(\theta, t).$$

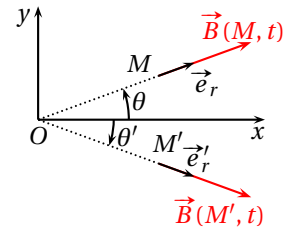


FIGURE 5 – Propriétés de symétrie

On en déduit le champ magnétique dans l'entrefer

$$\vec{B}(\theta, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i(t)}{2e} \vec{e}_r & \text{pour } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ -\frac{\mu_0 i(t)}{2e} \vec{e}_r & \text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\end{cases}$$

Le profil spatial du champ magnétique dans l'entrefer est donc

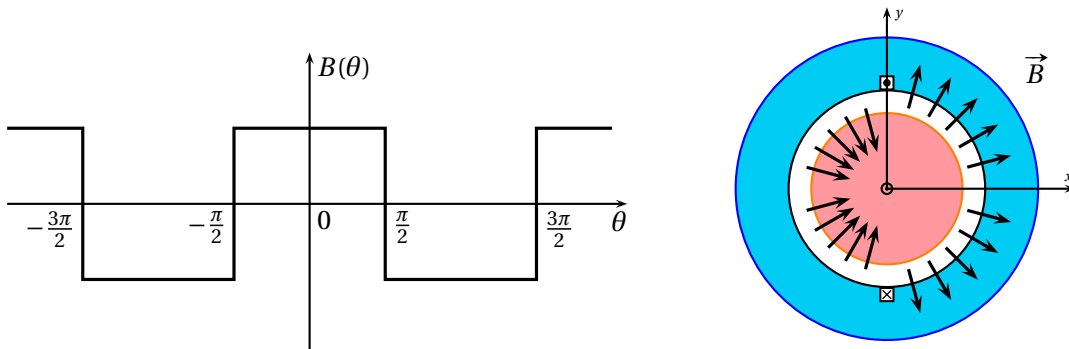


FIGURE 6 – Champ magnétique créé par une spire dans l'entrefer

2.2 Obtention d'un champ dont la dépendance angulaire est sinusoïdale

Le champ magnétique obtenu dans l'entrefer avec une spire est une fonction périodique de θ , mais n'est pas une fonction sinusoïdale de θ .

On peut s'en rapprocher en plaçant en série N spires décalées angulairement de π/N .

Représentons le champ magnétique obtenu en ajoutant deux autres spires, décalées de $\pi/3$ et $-\pi/3$.

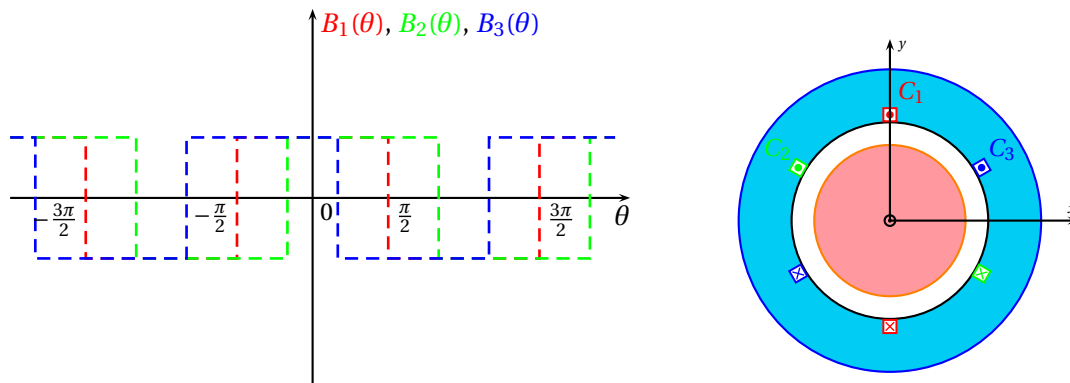


FIGURE 7 – Champs créés par trois phases décalées

En ajoutant les champs magnétiques obtenus par les trois circuits, on obtient un champ magnétique qui varie plus « régulièrement » en fonction de la position angulaire dans l'entrefer :

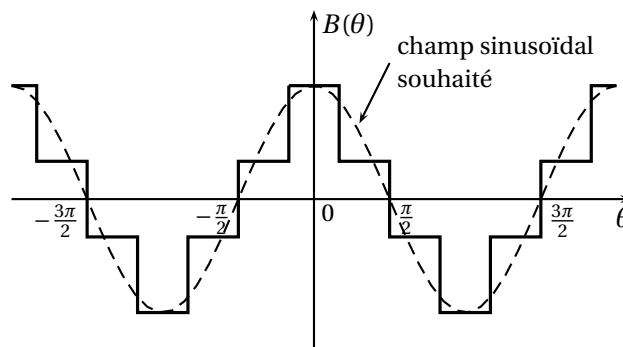


FIGURE 8 – Champ créé par trois phases : vers un champ sinusoïdal

En ajoutant suffisamment de spires parcourues par le même courant $i(t)$, on peut, avec une répartition spatiale *ad hoc* des spires, approcher un champ magnétique fonction sinusoïdale de la position angulaire :

$$\vec{B}(\theta, t) = K_s i(t) \cos(\theta) \vec{e}_r,$$

où K_s est un facteur de forme qui dépend du nombre de spires et de leur répartition spatiale.

L'ensemble des N spires parcourues par le même courant $i(t)$ forme une **phase** du circuit induit.

- Pour simplifier, on continuera par la suite à représenter les enroulements d'une phase par deux encoches diamétralement opposées (C_1 sur notre exemple).

3 — Champ glissant statorique

Nous avons vu comment générer un champ magnétique dans l'entrefer dont la dépendance avec la position angulaire est sinusoïdale. Si nous alimentons une phase avec un courant sinusoïdal $i(t) = I_s \cos(\omega t)$, nous obtenons un champ statorique

$$\vec{B}(\theta, t) = K_s I_s \cos(\omega t) \cos(\theta) \vec{e}_r$$

qui varie sinusoïdalement dans le temps de façon « stationnaire » : il oscille sur place (comme une onde stationnaire).

Nous souhaitons générer un champ magnétique tournant dans l'entrefer (le but étant d'entraîner le rotor dans un mouvement de rotation).

Considérons deux phases C_1 et C_2 , positionnées perpendiculairement, et alimentées par deux courants en quadrature temporelle de pulsation ω :

$$i_1(t) = I_s \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_s \sin(\omega t).$$

La phase C_1 crée le champ statorique

$$\vec{B}_1 = K_s i_1(t) \cos(\theta) \vec{e}_r = K_s I_s \cos(\omega t) \cos(\theta) \vec{e}_r.$$

La phase C_2 , décalée angulairement de $\pi/2$, crée le champ statorique

$$\vec{B}_2 = K_s i_2(t) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_r = K_s I_s \sin(\omega t) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_r = K_s I_s \sin(\omega t) \sin(\theta) \vec{e}_r.$$

Le champ magnétique résultant est alors donné par

$$\vec{B}_s(\theta, t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = K_s I_s [\cos(\omega t) \cos(\theta) + \sin(\omega t) \sin(\theta)] \vec{e}_r$$

soit comme $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$,

$$\vec{B}_s(\theta, t) = K_s I_s \cos(\omega t - \theta) \vec{e}_r.$$

À l'instant t , le champ $\vec{B}$ est maximum dans la direction $\theta = \omega t$ (on a alors $\cos(0) = 1$) ; cette direction tourne dans le sens direct à la vitesse angulaire ω .

En utilisant deux phases alimentées en quadrature, solidaires du stator, on obtient un champ statorique tournant à la vitesse angulaire ω , pulsation des courants dans les spires du stator : on parle de **champ glissant statorique**.

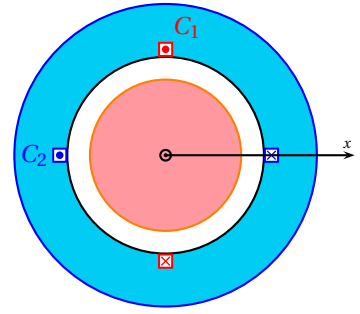


FIGURE 9 – Champ glissant statorique

4 — Champ glissant rotorique

Le rotor est muni d'encoches permettant d'y placer un bobinage parcouru par un courant permanent d'intensité I_r , ce circuit crée un champ magnétique radial dans l'entrefer³, dont les variations angulaires sont sinusoïdales si on dispose judicieusement plusieurs enroulements (comme précédent, on en représente qu'une spire pour simplifier le schéma).

En repérant par $\theta_r(t)$ la position du rotor (direction du vecteur $\vec{n}_r$ unitaire normal à la spire), le champ rotorique s'écrit

$$\vec{B}_r(\theta, t) = K_r I_r \cos[\theta_r(t) - \theta] \vec{e}_r.$$

Si le rotor tourne à la vitesse angulaire Ω_r , on a $\theta_r(t) = \Omega_r t + \theta_{r0}$: on obtient comme précédemment l'expression d'un champ glissant, dont le maximum tourne à la vitesse angulaire Ω_r .

En utilisant une phase alimentée par un courant continu, solidaire du rotor, on obtient un champ rotorique tournant à la vitesse angulaire Ω_r de rotation du rotor : on parle de **champ glissant rotorique**.

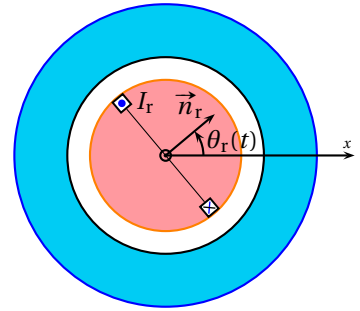


FIGURE 10 – Champ glissant rotorique

5 — Énergie et couple

5.1 Énergie magnétique

L'énergie magnétique a pour expression générale

$$\mathcal{E}_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau.$$

3. Les lignes de champ magnétique sont perpendiculaire à l'interface ferromagnétique-air de l'entrefer car $\mu_r \rightarrow \infty$.

En décomposant le domaine d'intégration entre le milieu magnétique et l'entrefer, on a

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{fer}} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau + \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où $\mu_r \rightarrow \infty$: l'énergie stockée dans le milieu magnétique est donc nulle, et l'énergie magnétique est entièrement localisée dans l'entrefer :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau.$$

On note ℓ la longueur de la machine selon Oz , R_1 le rayon moyen de l'entrefer (rayon du rotor ou rayon intérieur du stator) et e l'épaisseur de l'entrefer. Comme e est très faible, nous avons vu que nous pouvons considérer le champ uniforme selon r : $B(\theta, t)$. On prend donc le volume élémentaire délimité par les directions θ et $\theta + d\theta$, soit $d\tau = e\ell R_1 d\theta$; on a donc

$$\mathcal{E}_m = \int_0^{2\pi} \frac{B^2(\theta, t)}{2\mu_0} e\ell R_1 d\theta.$$

Le champ dans l'entrefer est la superposition des champs statorique et rotorique :

$$\vec{B}(\theta, t) = \vec{B}_s(\theta, t) + \vec{B}_r(\theta, t) = (K_s I_s \cos(\omega t - \theta) + K_r I_r \cos[\theta_r(t) - \theta]) \vec{e}_r.$$

On a donc

$$B^2(\theta, t) = K_s^2 I_s^2 \cos^2(\omega t - \theta) + K_r^2 I_r^2 \cos^2[\theta_r(t) - \theta] + 2K_s K_r I_s I_r \cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta)$$

et

$$\mathcal{E}_m = \frac{K_s^2 I_s^2}{2\mu_0} e\ell R_1 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \theta) d\theta + \frac{K_r^2 I_r^2}{2\mu_0} e\ell R_1 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta_r(t) - \theta) d\theta + \frac{K_s K_r I_s I_r}{\mu_0} e\ell R_1 \int_0^{2\pi} \cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta) d\theta.$$

L'expression de l'énergie magnétique fait apparaître trois termes : l'un propre au stator, l'un propre au rotor et un terme de couplage.

Le terme propre au stator s'écrit

$$\frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \theta) d\theta = \frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\omega t - 2\theta)}{2} d\theta = \frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2 \times \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi e\ell R_1}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2.$$

De même le terme propre au rotor s'écrit

$$\frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta_r(t) - \theta) d\theta = \frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta_r(t) - 2\theta)}{2} d\theta = \frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 \times \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi e\ell R_1}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2.$$

On a de plus

$$\cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta) = \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \theta_r(t) - 2\theta) + \cos[\omega t - \theta_r(t)]] ,$$

ce qui permet d'écrire le terme de couplage

$$\begin{aligned} \frac{e\ell R_1}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \int_0^{2\pi} \cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta) d\theta &= \frac{e\ell R_1}{2\mu_0} K_s K_r I_s I_r \left[\int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta_r(t) - 2\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \cos[\omega t - \theta_r(t)] d\theta \right] \end{aligned}$$

L'intégrale du terme $\cos(\omega t + \theta_r(t) - 2\theta)$ par rapport à θ est nulle entre 0 et 2π (intégrale d'une fonction sinusoïdale sur deux périodes) ; le terme $\cos(\omega t - \theta_r(t))$ étant indépendant de la variable ⁴ θ , on a

$$\int_0^{2\pi} \cos[\omega t - \theta_r(t)] d\theta = 2\pi \cos[\omega t - \theta_r(t)]$$

d'où

$$\frac{e\ell R_1}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \int_0^{2\pi} \cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta) d\theta = \frac{\pi e\ell R_1}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \cos[\omega t - \theta_r(t)].$$

Finalement, l'énergie magnétique du dispositif s'écrit en fonction de la position angulaire du rotor

$$\mathcal{E}_m(\theta_r) = \frac{\pi e\ell R_1}{2\mu_0} K_s^2 I_s^2 + \frac{\pi e\ell R_1}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{\pi e\ell R_1}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \cos[\omega t - \theta_r(t)].$$

4. On rappelle que $\theta_r(t)$ représente la position du rotor.

5.2 Couple magnétique

Le couple s'exerçant sur le rotor dont l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m(\theta_r)$ dépend de la position angulaire θ_r est donné par

$$\Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta_r} \right)_{I_s, I_r}.$$

C'est donc le terme de couplage qui permet d'obtenir un couple sur le rotor, dont l'expression est

$$\Gamma = \frac{\pi e \ell R_1}{\mu_0} K_s K_r I_s I_r \sin[\omega t - \theta_r(t)].$$

6 — Condition de synchronisme

6.1 Couple moyen exercé sur le rotor

Dans le cas général, $\omega t - \theta_r(t)$ dépend du temps, et $\langle \cos[\omega t - \theta_r(t)] \rangle = 0$; on a alors un couple moyen nul : $\langle \Gamma \rangle = 0$. Le moteur ne peut alors pas fonctionner.

Il faut que $\omega t - \theta_r(t)$ soit une constante pour que le couple moyen soit non nul, soit

$$\omega t - \theta_r(t) = \alpha.$$

Le rotor tourne alors à la même vitesse angulaire que le champ glissant statorique, avec un retard angulaire α .

Le couple moyen vaut alors

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\pi e \ell R_1}{\mu_0} K_s I_s K_r I_r \sin \alpha.$$

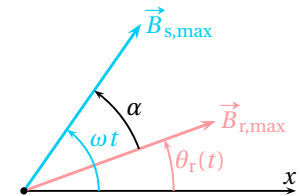


FIGURE 11 – Directions moyennes des champs glissants

- Quand la condition de synchronisme est respectée, le couple est indépendant du temps; il est donc égal à sa valeur moyenne, soit $\langle \Gamma \rangle = \Gamma$.
- On peut noter le champ statorique $B_s(\theta, r) = B_{sm} \cos(\omega t - \theta) \vec{e}_r$ où $B_{sm} = K_s I_s$ est l'amplitude de ce champ. On note de même le champ rotorique $B_r(\theta, r) = B_{rm} \cos(\theta_r - \theta) \vec{e}_r$ où $B_{rm} = K_r I_r$ est l'amplitude de ce champ.
- L'entrefer est un « tube » de rayon R_1 , de longueur ℓ et d'épaisseur e . Comme e est très faible, on peut écrire son volume $V = 2\pi R_1 e \ell$.

On peut alors écrire $\frac{\pi e \ell R_1}{\mu_0} K_s I_s K_r I_r = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm}$.

Le couple moyen exercé sur le rotor est non nul s'il y a synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique :

$$\omega = \dot{\theta}_r, \quad \text{soit} \quad \omega t = \theta_r(t) + \alpha.$$

Le rotor tourne à la même vitesse angulaire que la pulsation des courants des phases statoriques.

On a alors un couple constant

$$\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin \alpha,$$

où $V = 2\pi R_1 e \ell$ est le volume de l'entrefer, B_{sm} l'amplitude du champ statorique, B_{rm} l'amplitude du champ rotorique et α l'angle entre le champ rotorique et le champ statorique.

- Le couple fourni est d'autant plus important que les dimensions de la machine (R_1 et ℓ) sont importantes.
- On a montré (cf. 2.1) que les champs magnétiques créés varient comme $1/e$ (on a $\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 i}{2e} \vec{e}_r$ avec une seule spire). Le terme $V B_{sm} B_{rm}$ est donc proportionnel à $e \times \frac{1}{e} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$: le couple est d'autant plus important que l'entrefer e est petit⁵.

5. L'expression de $\langle \Gamma \rangle$ semble montrer que le couple augmente si le volume V de l'entrefer augmente, mais une augmentation de e entraîne une diminution de l'amplitude des champs magnétiques...

6.2 Stabilité du système en fonctionnement moteur

Le système fonctionne en moteur si le couple exercé sur le rotor est positif : $\Gamma > 0$. Il faut donc $\sin \alpha > 0$, soit $\alpha \in]0, \pi[$: le champ rotorique est en retard sur le champ statorique ; on peut considérer que le rotor est « entraîné par le champ statorique tournant », en tentant de s'aligner avec lui.

Considérons un moteur synchrone entraînant une charge mécanique exerçant un couple résistant $-\Gamma_c < 0$. En notant J le moment d'inertie du rotor par rapport à son axe, le théorème du moment cinétique s'écrit

$$J \frac{d^2 \theta_r(t)}{dt^2} = \Gamma - \Gamma_c.$$

Le régime permanent, où le rotor tourne à vitesse constante, correspond donc à $\Gamma - \Gamma_c = 0$.

On représente $\Gamma(\alpha)$ en fonction de α ; le point de fonctionnement correspond alors à l'intersection $\Gamma(\alpha) = \Gamma_c$.

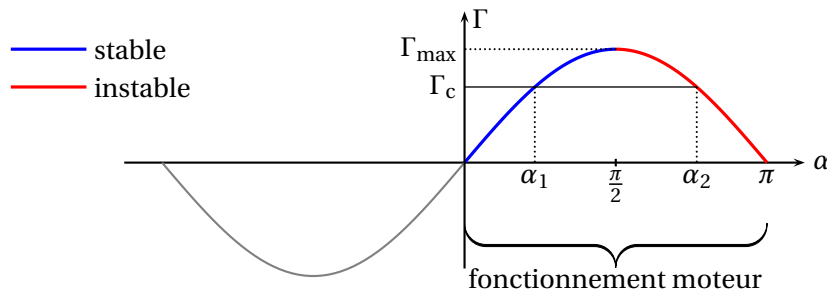


FIGURE 12 – Points de fonctionnement du moteur synchrone

Il apparaît deux points de fonctionnement possibles : α_1 avec $0 < \alpha_1 < \pi/2$ et α_2 avec $\pi/2 < \alpha_2 < \pi$. Nous pouvons mener qualitativement la discussion sur leur stabilité par l'examen du graphe.

Position α_1 : supposons qu'à partir de cette position angulaire, le rotor ralentisse légèrement ; l'angle α_1 va donc augmenter. La courbe $\Gamma(\alpha)$ étant croissante sur $[0, \pi/2]$, le couple moteur va donc augmenter, ce qui va permettre au rotor de « rattraper » son retard⁶ et de revenir au point de fonctionnement α_1 . On peut mener un raisonnement similaire si le rotor accélère légèrement : α_1 diminue, la couple moteur diminue aussi, et le rotor ralentit jusqu'à se caler à α_1 . La position α_1 est donc stable.

Position α_2 : un ralentissement du rotor qui se traduit par une augmentation de α_2 entraîne une diminution du couple moteur ($\Gamma(\alpha)$ est décroissante sur $[\pi/2, \pi]$, et l'écart α augmente. Cette position est instable.

➤ Le couple moteur exercé sur le rotor est maximal pour $\alpha = \pi/2$. Si $\Gamma_c > \Gamma_{\max}$, il n'y a pas de point de fonctionnement possible : il y a décrochage et le rotor finit par s'immobiliser (on a $\frac{d^2 \theta_r}{dt^2} < 0$ d'après le théorème du moment cinétique).

6.3 Démarrage du moteur synchrone

Le moteur synchrone pose un problème pour son démarrage : si le rotor est initialement immobile, soit $\dot{\theta}_r = 0$, et que l'on applique un champ statorique tournant à la pulsation ω , la condition de synchronisme n'est pas respectée ($\omega - \dot{\theta}_r = \omega \neq 0$), et $\langle \Gamma \rangle = 0$: le couple moyen exercé sur le rotor est nul.

Il existe deux solutions pour le démarrage d'un moteur synchrone :

- on lance le rotor avec un autre moteur (en général un moteur à courant continu) jusqu'à atteindre $\dot{\theta}_r = \omega$; on peut alors couper le moteur annexe, et le fonctionnement en moteur synchrone est possible ;
- on fait croître progressivement la pulsation ω du champ statorique en partant de $\omega = 0$ jusqu'à la valeur souhaitée en fonctionnement permanent. Il faut cependant asservir la pulsation ω du champ statorique à la vitesse angulaire de rotation du rotor pour avoir $\omega(t) = \dot{\theta}_r(t)$ à chaque instant : on parle de **machine auto pilotée**.

6. Si $\alpha > \alpha_1$, on a $\Gamma(\alpha) > \Gamma(\alpha_1) = \Gamma_c$ et le théorème du moment cinétique entraîne $J \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} = \Gamma(\alpha) - \Gamma_c > 0$: on a bien $\frac{d^2 \theta_r}{dt^2} > 0$ et le rotor accélère.

7 — Modèle électrique de l'induit

7.1 Équations électriques

En mode moteur, la machine synchrone produit une puissance mécanique $P_{\text{méca}} = \Gamma \omega$.

Nous considérons une machine synchrone bipolaire : le champ glissant statorique est généré par deux enroulements de l'induit parcourus par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ (en quadrature)

Le rotor en solidaire de l'enroulement de l'inducteur parcouru par l'intensité constante I_r .

On considère les deux enroulements du stator identiques, de résistance R_s , tandis que l'enroulement du rotor a pour résistance R_r .

On note ϕ_1 et ϕ_2 les flux du champ magnétique total à travers les deux enroulements du stator, et ϕ_r le flux à travers l'enroulement du rotor.

Modèle électrique du rotor (inducteur)

Le flux magnétique à travers l'enroulement du rotor est

$$\phi_r = \phi_{p,r} + \phi_{s \rightarrow r},$$

où $\phi_{p,r}$ est le flux propre (flux de champ créé par l'enroulement du rotor à travers lui-même) et $\phi_{s \rightarrow r}$ le flux du champ créé par le stator.

Le rotor étant parcouru par un courant I_r constant (continu), le flux propre $\phi_{p,r}$ est une constante.

La condition de synchronisme étant respectée, le rotor est fixe par rapport au champ magnétique créé par le stator ; le flux $\phi_{s \rightarrow r}$ ne varie donc pas dans au cours du temps.

Le flux ϕ_r à travers le rotor est constant.

D'après la loi de Faraday $e_r = -\frac{d\phi_r}{dt}$, la fém induite dans le rotor est donc nulle. En convention récepteur, la tension aux bornes de l'enroulement du rotor s'écrit donc

$$u_r = R_r I_r.$$

➤ Il n'y a pas de fém induite dans le circuit du rotor : on l'appelle ainsi le circuit **inducteur**.

Modèle électrique du stator (induit)

Le flux magnétique à travers chaque enroulement du stator s'écrit comme la somme du flux propre de cet enroulement, du flux dû à l'autre enroulement, et du flux dû au rotor. Pour le premier enroulement, on a donc

$$\phi_1 = \phi_{p,1} + \phi_{2 \rightarrow 1} + \phi_{r \rightarrow 1}.$$

En notant L_s l'inductance propre de chaque enroulement, M_{12} l'inductance mutuelle des deux enroulements du stator et $M_{r \rightarrow 1}$ l'inductance mutuelle entre l'enroulement du rotor et le premier enroulement du stator, on a

$$\phi_1 = L_s i_1 + M_{12} i_2 + M_{r \rightarrow 1} I_r.$$

➤ Les deux enroulements du stator étant perpendiculaires entre eux (cf. figure 9), le flux du champ créé par l'un des enroulements à travers l'autre est nul, soit $M_{12} = 0$.

➤ D'après la figure 1, le rotor est perpendiculaire au premier circuit C_1 quand $\theta_r = \pi/2$; on a alors $M_{r \rightarrow 1} = 0$. Le couplage entre l'enroulement du rotor et C_1 est extremum quand $\theta_r = 0[\pi]$. Nous admettons que le coefficient d'inductance mutuelle est de la forme $M_{r \rightarrow 1} = M_0 \cos \theta_r$.

Le flux à travers C_1 s'écrit alors

$$\phi_1 = L_s i_1(t) + M_0 \cos \theta_r I_r = L_s i_1(t) + M_0 I_r \cos(\omega t - \alpha)$$

avec la condition de synchronisme $\theta_r(t) = \omega t - \alpha$. La fém induite dans le circuit C_1 vaut alors

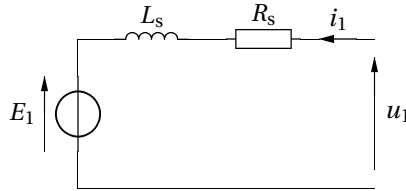
$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_s \frac{di_1}{dt} + M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha).$$

La tension $u_1 = R_s i_1 - e_1$ aux bornes du circuit C_1 vaut donc

$$u_1 = R_s i_1 + L_s \frac{di_1}{dt} - M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha) .$$

On définit la **force contre électromotrice (fcém)** due à la rotation du rotor $E_1 = -e_{r \rightarrow 1}$, où $e_{r \rightarrow 1} = -\frac{d\phi_{r \rightarrow 1}}{dt}$ est la fém induite due au couplage entre le rotor et le circuit induit.

Le schéma électrique équivalent au circuit C_1 de l'induit est donc



$$u_1 = R_s i_1 + L_s \frac{di_1}{dt} + E_1 \quad \text{avec} \quad E_1 = -M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha)$$

De la même manière, le flux à travers le second enroulement C_2 du stator est

$$\phi_2 = \phi_{p,2} + \phi_{1 \rightarrow 2} + \phi_{r \rightarrow 2} = L_s i_2 + M_{21} i_1 + M_{r \rightarrow 2} I_r .$$

On a toujours $M_{21} = M_{12} = 0$. Le circuit C_2 étant décalé de $\pi/2$ par rapport à C_1 , on a $M_{r \rightarrow 2} = M_0 \sin \theta_r$ soit $M_{r \rightarrow 2} = M_0 \sin(\omega t - \alpha)$. On a donc de même

$$e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_s \frac{di_2}{dt} - M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha) ,$$

et la tension $u_2 = R_s i_2 - e_2$ s'écrit

$$u_2 = R_s i_2 + L_s \frac{di_2}{dt} + M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha) .$$

Le schéma électrique est similaire, la tension étant donnée par

$$u_2 = R_s i_2 + L_s \frac{di_2}{dt} + E_2 \quad \text{avec} \quad E_2 = M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

► Contrairement au rotor, il y a bien un phénomène d'induction dans le stator; on appelle donc les enroulements du stator **l'induit**.

Les signaux étant sinusoïdaux, nous pouvons utiliser la notation complexe, et donner les représentations de Fresnel associées.

Pour le circuit C_1 , on a

$$\underline{U}_1 = R_s \underline{I}_1 + j L_s \omega \underline{I}_1 + \underline{E}_1 \quad \text{avec} \quad \underline{E}_1 = M_0 I_r \omega e^{j(\frac{\pi}{2} - \alpha)} .$$

► Sachant que $-\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, le signal complexe associé à $\sin(\omega t - \alpha)$ est $e^{j(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2})}$, d'où l'amplitude complexe de la fcém.

Pour le circuit C_2 , on a

$$\underline{U}_2 = R_s \underline{I}_2 + j L_s \omega \underline{I}_2 + \underline{E}_2 \quad \text{avec} \quad \underline{E}_2 = M_0 I_r \omega e^{-j\alpha} .$$

Représentation de Fresnel associée à la phase C_1 de l'induit :

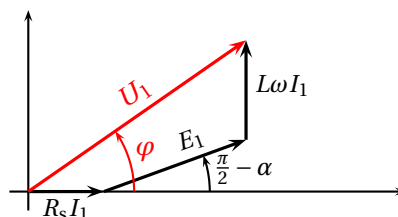


FIGURE 13 – Représentation de Fresnel des grandeurs électriques du premier circuit de l'induit

7.2 Bilan énergétique

La puissance électrique totale reçue par la machine s'écrit

$$p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_r I_r = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2 + L_s \left(i_1 \frac{di_1}{dt} + i_2 \frac{di_2}{dt} \right) + E_1 i_1 + E_2 i_2$$

soit

$$p(t) = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_s (i_1^2 + i_2^2) \right) + E_1 i_1 + E_2 i_2.$$

En régime périodique, le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_s (i_1^2 + i_2^2) \right)$ est de valeur moyenne nulle⁷. La puissance moyenne s'écrit alors

$$P = R_s I_{\text{eff},1}^2 + R_s I_{\text{eff},2}^2 + R_r I_r^2 + \langle E_1 i_1 + E_2 i_2 \rangle.$$

Avec $i_1(t) = I_s \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_s \sin(\omega t)$, on a $I_{\text{eff},1} = I_{\text{eff},2} = \frac{I_s}{\sqrt{2}}$, d'où $I_{\text{eff},1}^2 + I_{\text{eff},2}^2 = I_s^2$. On a donc

$$P = R_s I_s^2 + R_r I_r^2 + \langle E_1 i_1 + E_2 i_2 \rangle.$$

Le terme $R_s I_s^2 + R_r I_r^2$ correspond aux **pertes cuivre** par effet Joule dans les fils des enroulements. La puissance absorbée par les fcém dans l'induit vaut

$$P_{\text{fcém}} = E_1 i_1 + E_2 i_2 = -M_0 I_r I_s \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t - \alpha) + M_0 I_r I_s \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t - \alpha).$$

En utilisant la formule trigonométrique $\sin a \cos b - \sin b \cos a = \sin(a - b)$, on obtient $\sin(\omega t) \cos(\omega t - \alpha) - \cos(\omega t) \sin(\omega t - \alpha) = \sin \alpha$, d'où

$$P_{\text{fcém}} = M_0 I_r I_s \omega \sin \alpha.$$

- La puissance absorbée par les fcém dans l'induit est positive pour $\alpha \in]0, \pi/2[$, c'est-à-dire lorsque la machine a un fonctionnement moteur.

Le bilan de puissance électrique de la machine synchrone s'écrit

$$P_{\text{élec}} = P_{\text{cuivre}} + P_{\text{fcém}}$$

où $P_{\text{élec}}$ est la puissance électrique fournie à la machine, P_{cuivre} la puissance dissipée par effet Joule dans les enroulements des circuits (pertes cuivre) et $P_{\text{fcém}}$ la puissance électrique absorbée par les fcém de l'induit.

Appliquons le premier principe à l'ensemble de la machine :

$$d(U + E_c) = \delta W + \delta Q.$$

En considérant la température constante, on a $dU = 0$. Le moteur tournant à vitesse constante, son énergie cinétique est constante, et $dE_c = 0$. Le bilan se ramène donc à $\delta W + \delta Q = 0$.

Le transfert thermique *reçu* par le système s'identifie à l'énergie dégagée par effet Joule vers l'extérieur, soit

$$\delta Q = -P_{\text{cuivre}} dt.$$

Le travail reçu se décompose en un travail électrique et un travail mécanique.

Le travail électrique est $\delta W_{\text{élec}} = P_{\text{élec}} dt$, soit en utilisant le bilan électrique précédent

$$\delta W_{\text{élec}} = (P_{\text{cuivre}} + P_{\text{fcém}}) dt.$$

Le travail mécanique *reçu* est l'opposé du travail mécanique fourni à la charge, soit $\delta W_{\text{méca}} = -P_{\text{méca}} dt$ avec $P_{\text{méca}} = \Gamma \omega dt$.

Le bilan $\delta W_{\text{élec}} + \delta W_{\text{méca}} + \delta Q = 0$ s'écrit, après simplification par dt

$$(P_{\text{cuivre}} + P_{\text{fcém}}) - P_{\text{méca}} - P_{\text{cuivre}} = 0$$

7. Nous avons déjà vu que la valeur moyenne de la dérivée temporelle d'une fonction périodique est nulle. De plus, avec $i_1 = I_s \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_s \sin(\omega t)$ on a $i_1^2 + i_2^2 = I_s^2$ constant, de dérivée temporelle nulle.

d'où $P_{\text{méca}} = P_{\text{fcém}}$.

Une machine synchrone fonctionnant en moteur reçoit la puissance électrique $P_{\text{élec}}$.

Une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule dans les résistances des enroulements (pertes cuivre), l'autre partie est absorbée par les fcém de l'induit :

$$P_{\text{élec}} = P_{\text{cuivre}} + P_{\text{fcém}}.$$

La puissance électrique absorbée par les fcém est intégralement convertie en puissance mécanique fournie à la charge.

8 — Réversibilité : fonctionnement en alternateur

La machine synchrone a un fonctionnement parfaitement réversible.

Fonctionnement moteur : elle reçoit de la puissance électrique qu'elle convertit en puissance mécanique, entraînant la rotation du rotor.

Fonctionnement alternateur : elle reçoit de la puissance mécanique par la mise en rotation du rotor, qu'elle convertit en puissance électrique.

Pour décrire plus en détail le fonctionnement en alternateur :

- le rotor est entraîné à la vitesse angulaire ω ;
- l'enroulement rotorique, parcouru par un courant I_r permanent, crée un champ tournant $\vec{B}_r$, en rotation à la vitesse angulaire ω du rotor;
- le flux de $\vec{B}_r$ variable à travers les enroulements du stator crée une fém induite dans ces enroulements; elle est sinusoïdale à la pulsation ω d'après la loi de Faraday;
- il apparaît dans les enroulements statoriques des courants induits, de pulsation ω , qui créent une champ magnétique statorique $\vec{B}_s$ tournant à la même pulsation ω que le champ rotorique : la condition de synchronisme est automatiquement vérifiée;
- le système délivre une puissance électrique $P_{\text{élec}}$ aux bornes des enroulements statoriques.

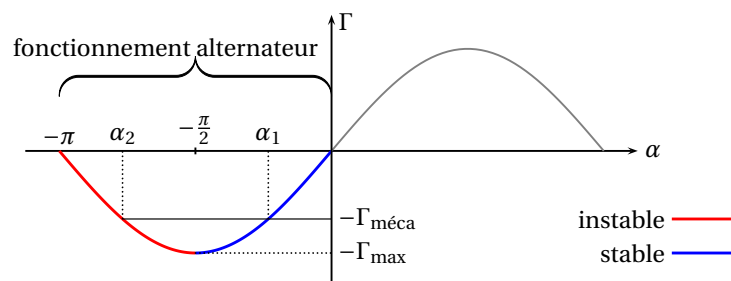


FIGURE 14 – Points de fonctionnement de l'alternateur synchrone

Le rotor est entraîné par un couple $\Gamma_{\text{méca}} > 0$ appliqué. Le mouvement du rotor crée un champ magnétique variable créant une fém induite dans les enroulements du stator; l'effet est un couple électromagnétique résistant s'exerçant sur le rotor :

$$\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} B_{\text{sm}} B_{\text{rm}} \sin \alpha < 0.$$

Le fonctionnement en alternateur est donc vérifié pour $-\pi < \alpha < 0$: le champ rotorique est alors en avance sur le champ statorique.

Le point de fonctionnement $\alpha_1 \in]\pi/2, 0[$ correspond à la position stable : si le rotor accélère, α diminue (il augmente en valeur absolue, l'écart entre les deux champs augmentant); le couple résistant augmente (en valeur absolue) et ralentit le rotor.

9 — Applications

Les moteurs synchrones sont utilisés pour des TGV, dans des voitures électriques (Toyota Prius), dans des installations industrielles de puissance fonctionnant en continu (pompes, convoyeurs, laminoirs, etc.)

Avantages :

- rendement élevé;
- bon rapport couple/encombrement.

Inconvénients :

- démarrage non autonome;
- possibilité de décrochage si la charge est trop importante.

Les machines synchrones sont principalement utilisées en alternateur, équipant toutes les centrales électriques.