LP19 - Bilans thermiques :
flux conductifs, convectifs et radiatifs

Joseph Delpy
Prépa Agreg ENS Paris-Saclay
Correcteur : Tom Kristensen

Janvier 2021

Niveau : CPGE
Prérequis :

- Thermo : 1er et 2nd principe, définition d'un flux thermique
- Corps noir et rayonnement d'équilibre thermique
- Mécanique des fluides : notion de couche limite et convection naturelle
- Loi d'Ohm en électrocinétique
- Gradient, divergence, Laplacien

Table des matières

1 Introduction

On a vu en cours de thermodynamique la description de systèmes évoluant vers, ou à l'équilibre thermodynamique. Pourtant, la très grande majorité des systèmes avec lesquels nous interagissons au quotidien ne vérifient pas cette hypothèse : prenons l'exemple d'une maison. On veut se maintenir hors de l'équilibre thermodynamique, et profiter de $20°C$ en intérieur alors qu'il peut faire 0 dehors ! En revanche, ce maintien hors équilibre engendre nécessairement des flux de puissances thermiques, et c'est à ce phénomène que nous allons nous intéresser.

Cette discussion n'a pas qu'un intérêt théorique : plus de 60 % de la consommation énergétique d'un foyer est dédiée au chauffage de la maison. (slide) On va voir ici l'importance d'isoler ses combles pour seulement 1€...

Puis rappels sur l'équilibre thermodynamique local sur slide. Pour un volume dV de matériau : si le temps caractéristique des processus microscopiques responsables de l'établissement de l'équilibre thermodynamique (collisions, relaxations en général) est très petit devant le temps de variation de la température du solide, alors on est toujours infiniment proche de l'équilibre et on peut utiliser les variables thermodynamiques classiques.

2 Conduction thermique dans les solides

2.1 Conservation de l'énergie

On étudie ici le cas d'un barreau solide 1D, de section droite S, pour lequel on fait les hypothèses suivantes :

- Pas de mouvement macroscopique du solide
- On néglige la dilatation thermique (volume constant)

Dans ce cas, le premier principe s'écrit simplement :

$$dU = \delta Q$$

On peut faire un bilan 1D sur le barreau, en considérant un flux de puissance entrant en x, et un flux sortant en $x + dx$. Dans ce cas on a :

$$dU = mc_v dT = [j_q(x,t) - j_q(x+dx,t)]\, Sdt = -\frac{\partial j_q(x,t)}{\partial x} Sdxdt$$

En divisant par le volume $dV = Sdx$, on obtient l'équation de conservation de l'énergie interne :

$$\boxed{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_q(x,t)}{\partial x} = 0}$$

Puis généralisation 3D à partir d'un volume quelconque sur slide, avec le remplacement de la dérivée spatiale par une divergence.

2.2 Diffusion thermique

On à l'équation bilan précédente, mais notre travail n'est pas terminé. Comment avoir une expression exploitable du vecteur densité de flux de puissance thermique, afin de décrire l'évolution de la température dans le barreau ?

Définition de la conduction thermique : Mode de transfert thermique interne à la matière et sans mouvement macroscopique de matière.

En fait, les atomes transmettent leur agitation thermique à leurs voisins, et ainsi l'énergie thermique est diffusée de proche en proche. On modélise ce phénomène de manière phénoménologique à l'aide de la loi de Fourier :

$$\boxed{\vec{j_q}(M,T) = -\lambda \vec{\nabla} T(M,t)}$$

avec λ la conductivité thermique du matériau (en W.m^{-1}.K^{-1}). A ce stade, il est bon de faire quelques remarques :

- C'est une loi linéaire, valable uniquement pour des gradients de température pas trop élevés
- Elle est juste pour un milieu isotrope
- λ (> 0) est une quantité intrinsèque au matériau

Pour résumer, on a une équation de conservation de l'énergie, et d'autre part un modèle qui décrit les densités de flux thermiques : on peut introduire l'expression de $\vec{j_q}$ dans notre bilan 3D pour obtenir l'équation de la diffusion thermique (éviter de parler de l'équation de la chaleur) :

$$\boxed{\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} - D_{th} \Delta T(M,t) = 0}$$

où $D_{th} = \dfrac{\lambda}{\rho c_v}$.

Sur slide : donner des ordres de grandeurs de conductivité thermique et coefficient de diffusion associé pour des matériaux diverses (bois, béton, verre, cuivre). Discuter le cas du métal, pour lequel les électrons participent à la conduction de la chaleur (théorie des phénomènes de transport simultanés, avoir vu la loi de Wiedemann et Franz au cas ou).

Manipulation : on cherche à mettre en évidence la diffusion thermique. Pour ça on utilise une lame de cuivre sur laquelle on vient fixer des clous séparés entre eux de environ 1 cm avec de la paraffine fondue puis refroidie. On place à l'une de ses extrémités une bougie dont la flamme est au contact du cuivre. On attend un peu, on voit les clous tomber les uns après les autres. La manip est simple et efficace, et elle ne prend pas plus de 2 ou 3 minutes. Ne pas hésiter à allumer la bougie et ensuite à expliquer le principe pendant que le cuivre chauffe.

2.3 Régime stationnaire : résistance thermique

Enfin, on discute le cas stationnaire, qui a des applications directes, notamment au niveau de l'isolation des maisons, comme discuté en introduction. Pour ça, on va considérer une paroi 1D, d'épaisseur e, située en x=0, de telle sorte que pur les x négatifs, le milieu est l'intérieur de la maison, à la température T_1. Pour $x > e$, le milieu est l'extérieur, à la température T_2. En régime stationnaire, on doit résoudre :

$$\frac{d^2T(x)}{dt^2} = 0$$

soit $T(x) = ax + b$, où a et b sont fixés par les conditions aux limites :

- $T(x = 0) = T_1$ donc $b = T_1$
- $T(x = e) = T_2$ donc $a = \dfrac{T_2 - T_1}{e}$

Finalement, $T(x) = T_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{e}x$ On calcule alors la puissance thermique traversant la paroi au total : $\Phi = \vec{j_q}.S\vec{e_x}$, ce que l'on réécrit : $(T_1 - T_2) = R_{th}\Phi$, avec $R_{th} = \dfrac{e}{\lambda S}$ la résistance thermique de la paroi, en K.W^{-1}.

Sur slide : présenter l'analogie entre loi d'Ohm et loi de Fourier (en régime stationnaire uniquement !) Insister sur la notion de résistance thermique et détailler les lois qui s'appliquent sur elles : addition des résistances en série, addition des conductances thermiques en parallèle.

Transition : on a détaillé le cas du solide, dans lesquels les transferts thermiques se font de de manière diffusive par conduction. En fait, la conduction existe dans tous les corps, et donc également dans les fluides. Pourtant, si l'on s'intéresse à la thermalisation d'un fluide, celle-ci se fait bien plus vite que prévue par la diffusivité thermique. En fait, dans les fluides, c'est le phénomène de convection, déjà vu en cours de mécanique des fluides, qui est prépondérant. Il est extrêmement difficile à modéliser mathématiquement. On va ici se réduire à décrire les échanges entre un fluide et une paroi à sa surface, toujours dans l'optique de décrire les pertes thermique du mur d'une maison. On traitera également les transferts par rayonnement à la surface d'une paroi.

3 Transferts thermiques aux interfaces

3.1 Phénomène de Conducto-convection

On étudie ici les interactions entre un solide à température T_1 donnée, et un fluide occupant le demi espace x positif, à une température uniforme T_2 loin de l'interface.

Dans le fluide, la température est uniformisée par convection majoritairement. Dans le solide, il y a de la diffusion. Comment modéliser la densité de flux thermique à l'interface, $j_q(x = 0)$?

Ici, il peut être judicieux de travailler en parallèle sur un schéma qui présente l'interface en x=0 comme précédemment, et dans le même temps construire la loi de Newton :

On a vu en mécanique des fluides la notion de couche limite. Cela signifie que sur une distance δ au voisinage direct de l'interface, une portion du fluide est immobile, alors qu'il est en mouvement loin de l'interface. Dans ce cas, on peut considérer que dans la couche limite, le transfert thermique se fait par conduction. Dans ce cas, on peut appliquer la loi de Fourier dans la couche limite. Par la suite, on néglige son épaisseur et on travaille avec une discontinuité de la température, décrite par la loi de Newton pour la conducto-convection :

$$\boxed{\vec{j_q(x = 0)} = h(T_1 - T_2).\vec{n_{1\to 2}}}$$

où h est le coefficient conducto-convectif (en W.m^{-2}.K^{-1}), qui vaut $h = \frac{\lambda}{\delta}$, et $\vec{n_{1\to 2}}$ est le vecteur unitaire dirigé vers les x positifs. Si l'on intègre le flux de puissance sur toute la surface S de la paroi, on introduit à nouveau une résistance thermique, de conducto-convection ici :

$$T_1 - T_2 = R_{cc}\Phi$$

avec $R_{cc} = \dfrac{1}{hS}$

On a explicité ici le transfert thermique à l'interface entre un fluide et une paroi solide. Mais ce n'est pas le seul transfert aux interfaces. En effet, lorsqu'on se place face au soleil, on sent que notre peau se met à chauffer. Pourtant, on se doute bien que le soleil n'a pas chauffé par conduction ou convection tous les milieux qui nous sépare de lui. Il est donc nécessaire d'étudier le rôle du rayonnement dans notre problème.

3.2 Flux radiatifs et corps noir

Sans rentrer dans les détails les plus pointus (voir la LP17 pour ça), on peut expliquer le phénomène physique : lorsqu'un matériau est porté à une certaine température, ses électrons possèdent une certaine énergie de vibration, et émettent de la lumière en se désexcitant spontanément : c'est le rayonnement thermique. Ce rayonnement est naturellement absorbé par d'autres électrons, puis réémis également sous forme d'émission spontanée : c'est ces cycles absorption/émission qui permettent au corps d'être à l'équilibre thermodynamique avec son rayonnement thermique. Si en plus on modélise le système par un corps noir, on peut dire que la totalité du rayonnement émis est un rayonnement thermique (pas de réflexion par exemple). On peut résumer au tableau en une phrase :

Rappels : Un corps noir à une température donnée est à l'équilibre avec un rayonnement purement thermique, qui est décrit par la loi de Planck.

Sur slide : on rappelle la loi de Planck et la courbe associée.

Remarques :

- Le rayonnement d'équilibre thermique est isotrope
- il se propage à la vitesse c

Dans la suite, on se concentre sur la loi de Stefan :

Le flux surfacique d'équilibre émis vérifie la relation :

$$\boxed{\varphi = \sigma T^4}$$

Avec φ en W.m^{-2}, et $\sigma = 5,67.10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4} la constante de Stefan.

Application : Rayonnement solaire : On admet la température du soleil : $T_s = 5600$K, ainsi que son rayon : $R_s = 6,97.10^8$ m. On déduit la puissance totale émise par le soleil :

$$P = \sigma T_s^4 \times 4\pi R_s^2 = 3,4.10^{26}\ W$$

Transition : On a donc vu à la fois la description des flux de puissance thermique qui résultent des inhomogénéités de température dans un solide, ainsi que des différents transferts thermiques aux interfaces d'un solide et d'un fluide, ou d'un solide et d'un rayonnement. On va pouvoir appliquer ça au bilan thermique d'un appartement.

4 Application au bilan thermique d'un studio

4.1 Déperditions thermiques

On s'intéresse à un studio, chauffé à 20°C alors qu'il fait 0°C dehors, dont on considère qu'un seul mur donne sur l'extérieur (cette description est bien justifiée : comme les appartement voisins, au dessus et en dessous sont également chauffés, les pertes à travers les parois communes sont négligeables). On donne les données suivantes :

- surface $S = 25$ m^2
- épaisseur $e = 30$ cm
- conductivité thermique du béton : $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}

- coefficient conducto-convectif du béton : $h = 3$ W.m^{-2}.K^{-1}
  Dans ce cas, on calcule le flux à travers le mur grâce aux résultats précédents, en se souvenant qu'il y a conduction dans la paroi, et que l'air à température nulle loin du mur reçoit de la chaleur à son contact :
$$\Phi_P = \frac{T_{int} - Text}{R_{th} + R_{cc}}$$
  où $R_{th} + R_{cc} = \dfrac{e}{\lambda S} + \dfrac{1}{hS} = 0.035$ K.W^{-1}
  la puissance perdue à travers la paroi est alors $\boxed{\Phi_P = 571W}$

4.2 Dimensionnement d'un chauffage

A partir de ce bilan thermique, on peut se demander comment assurer le chauffage de l'appartement à la température supposée. On s'intéresse ici au choix d'un radiateur infrarouge portée à la température T_R (Comme certains radiateurs désormais interdits qui chauffaient les terrasses des bars), modélisé par une surface d'aire A carrée de 50 cm de côté qui émet un rayonnement thermique de puissance Φ_R. On suppose que la totalité du rayonnement est reçue par le mur (hypothèse évidemment abusive !)

Pour faire les choses bien, on peut effectuer un bilan thermique sur la surface intérieure du mur. La condition pour que ce système soit en régime stationnaire à la température de 20 °C, comme supposé, est :

$$\boxed{\Phi_R = \sigma T_R^4 \times A = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th} + R_{cc}} = \Phi_P}$$

c'est-à-dire que la puissance reçue égale celle qui est perdue. Finalement on trouve que la température du radiateur doit être de $\boxed{T_R = 175^\circ\ \mathrm{C}}$. L'ordre de grandeur est bon.

5 Conclusion

On rappelle les grandes idées de la leçon : conduction dans un solide (loi de Fourier), rôle des interfaces dans toutes ces histoires de flux thermiques (loi de Newton et Stefan), application au bilans thermiques de maisons. On peut ouvrir sur quelque chose qu'on a caché sous le tapis dans la leçon : comme le mur absorbe le rayonnement du radiateur, il va lui aussi le réémettre en partie sous forme d'un rayonnement thermique, même si le modéliser par un corps noir est abusif. En revanche, le rayonnement produit est utilisé par la thermographie infrarouge pour réaliser des bilans d'isolation des maisons (on fait ainsi l'image des pertes thermiques !)

6 Entretien : questions et commentaires

6.1 Questions

- **En quoi l'équilibre thermodynamique local est-il important ici ?** Il nous permet de manipuler les variables thermodynamiques usuelles (Énergie, température, pression, etc) alors qu'on traite de systèmes hors équilibre. Cette notion mérite d'être dans le corps de la leçon, pas seulement en introduction.
- **Pour quels systèmes thermodynamiques peut-on écrire $dU = mc_v dT$?** Ceux qui vérifient les deux lois de Joule, donc gaz parfaits et phase condensées (solide, liquide).
- **Comment caractériser le temps de diffusion de la température ?** Si le système à une longueur caractéristique L, alors le temps de diffusion est de l'ordre de L^2/D_{th}.
- **Comment montrer que la diffusion est un processus irréversible ?** L'équation associée fait intervenir une dérivée première en temps : elle n'est pas invariante par renversement du temps (changement de t en -t dans l'équation)
- **A quelle notion plus avancée peut-on faire appel pour expliquer la conduction thermique dans un solide ?** On peut penser à une description des atomes par des oscillateurs harmoniques couplés : dans ce cas, l'excitation thermique associée se concrétise par l'existence de phonons (quantum de vibration dans le solide). C'est les interactions entre phonons qui thermalisent le matériau.

- **Deux résistances thermiques en parallèles : quelle réalité physique ?** Lorsque deux matériaux sont côte-à-côte, et non l'un devant l'autre : par exemple, la résistance d'une fenêtre est en parallèle avec celle du mur dans lequel elle est installée.
- **Quelle relation entre la couche limite et le nombre de Reynolds ? Que conclure sur le rôle de la viscosité ?** On trouve parfois $\delta \propto 1/\sqrt{Re}$, donc la couche limite croît avec la viscosité du fluide.
- **Comment mesurer les écarts à l'idéalité du corps noir pour un système réel ?** On utilise l'émissivité : facteur e compris entre 0 et 1, qui donne la fraction du rayonnement émis qui est effectivement un rayonnement thermique (le reste étant de la réflexion majoritairement).
- **Comment justifier le - qui apparaît dans la loi de Fourier ?** Le flux thermique va des zones chaudes vers les zones froides. On s'assure de respecter le second principe de cette manière.
- **D'autres loi analogues à la loi de Fourier ?** La loi de d'Ohm, la loi de Fick, le vecteur densité de probabilité en mécanique quantique.
- **Comment mesurer la température du soleil ?** On fait l'acquisition du spectre du rayonnement issu du soleil, on mesure la longueur d'onde du maximum d'émission, on utilise la loi du déplacement de Wien.
- **Pourquoi a-t-on une sensation de froid en touchant un métal, et pas un bout de bois même s'ils sont à la même température ?** La sensation de froid ou chaud ne provient pas de la température, mais du flux thermique passant à travers la peau : comme un métal conduit très bien la chaleur, le flux sortant de nos doigts est très important, d'où la sensation de froid.
- **Comment s'isoler au mieux de la conduction et de la convection ? Comment marche ou thermos ou un vase Dewar ?** Le meilleur isolant est le vide ! Dans le cas d'un thermos ou d'un Dewar, on a deux parois séparés par de l'air. On limite ainsi la conduction. Pour s'affranchir de la convection, il faut en plus que cette couche d'air soit suffisamment fine pour qu'il ne puisse pas y avoir établissement de mouvement d'air entre la double paroi.

6.2 Commentaires

- Bien penser à introduire des surfaces orientées à chaque fois que l'on calcule le flux du vecteur $\vec{j_q}$ à travers une surface.
- Lors de l'établissement de l'équation de la diffusion thermique, il faut peut-être détailler le passage de la divergence du gradient au Laplacien pour un élève.
- L'analogie entre loi d'Ohm et loi de Fourier ne fait pas nécessairement appel à une équation macroscopique de la forme $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$. Elle est directement exploitable depuis l'expression du vecteur flux de puissance thermique $\vec{j_q} = -\lambda\vec{\nabla}T$, puisque la loi d'Ohm locale est $\vec{j_e} = -\sigma\vec{\nabla}V$.
- C'est bien de donner des ordres de grandeurs à chaque fois qu'on rencontre des coefficients thermiques, on lorsqu'on discute les calculs de puissance. J'ai dit à l'oral que la puissance fournie par le soleil était "faramineuse", dans ce cas il faut le justifier : l'énergie électrique produite par une centrale nucléaire est de l'ordre du GW (c'est 10^{19} fois moins...)