

"Jean PERRIN et l'hypothèse atomique."

① $V_{\text{molaire}} = \frac{RT_0}{P_0} \approx \frac{8,3 \cdot 300}{10^5} \approx \underline{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}$
(gaz parfait)

Pour un récipient occupant x moles de gaz: $\frac{V_{\text{sphères}}}{V_{\text{occupé}}} = \frac{x N_A \frac{4}{3} \pi R_m^3}{x V_{\text{molaire}}} \approx \underline{1 \cdot 10^{-4}}$

Sous 1 atm à $T_0 = 300 \text{ K}$, le gaz occupe un volume 10 000 fois plus grand que le seul volumes des sphères (molécules).

② Un gaz parfait est un gaz dont les particules n'ont aucune interaction entre elles: ni chocs, ni interaction électromagnétique. On peut considérer que c'est le cas ici, puisqu'en moyenne chaque particule dispose pour elle-même d'un volume 10^4 fois plus important que son volume propre.

③ $E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m_m v^2$ donc en moyenne: $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T_0$ et $E_{\text{pm}} = m_m g z \lesssim m_m g h$.

Ainsi: $\frac{E_{\text{cm}}}{E_{\text{pm}}} \approx \frac{v^2}{2gh} = \frac{3RT_0}{2ghM} \approx \frac{3 \cdot 8,3 \cdot 300}{2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0,03} \approx \underline{4 \cdot 10^3}$, pour $h = 3 \text{ m}$.

On a donc $E_{\text{cm}} \gg E_{\text{pm}}$, soit $E_{\text{m,m}} \approx E_{\text{cm}}$ donc la dynamique des particules est régie par les variations d' E_{cm} liées aux chocs, et le rôle joué par la pesanteur est négligeable dans ces conditions.

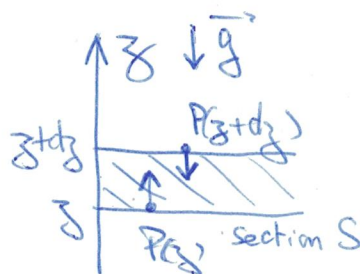
④ $\rho = \frac{m_m}{V} = \frac{n \cdot M}{V} = \frac{PM}{RT_0}$

Equilibre de la tranche entre z et $z+dz$:

$$0 = P(z)S - P(z+dz)S - Sdz \rho g$$

$$\Leftrightarrow \text{sur } \vec{u}_z: \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g = -\frac{MgP}{RT_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{Mg}{RT_0} P = 0}$$



(2)

⑤ Solution homogène: $P(z) = C \cdot e^{-z/H}$

Condition aux limites: $P(z=0) = P_0 = C \cdot 1$ donc $P(z) = P_0 \cdot \underbrace{e^{-z/H}}_{\leftarrow f(z)}$

avec $H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{8,3 \cdot 800}{0,03 \cdot 10} \approx \underline{8,3 \text{ km}}$

Pour $z < h$ de l'ordre de quelques mètres, $\frac{\Delta P(z)}{\Delta z} \approx \frac{P_0}{H} e^{-z/H} \approx \frac{P_0}{H}$

AN: $\Delta P \approx \frac{h}{H} P_0 \approx \frac{P_0}{10^3} \approx \underline{99 \text{ mbar}}$

Pour détecter une variation de pression sur quelques mètres, il faut un manomètre sensible au mbar près.

Dans le cas de l'eau liquide $\rho_{\text{eau}} g = \left. \frac{dP}{dz} \right|_{\text{eau}} = 10^4 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$: 1 bar tous les 10m !
 $\rightarrow$ constante car peu compressible

⑥ $A(z) = e^{-\frac{M_m g z}{RT_0}} = e^{-\frac{M_m g z}{k_B T_0}}$

soit $E(z) = M_m g z$: énergie potentielle de pesanteur de M_m .

$\rightarrow$ Interprétation: la distribution de pression, ou de densité particulière dans le champ de pesanteur dans un thermostat T_0 , est régie par un facteur de Boltzmann $e^{-E/k_B T_0}$ qui compare l'énergie d'agitation thermique $k_B T_0$ à l'énergie moléculaire E caractéristique du phénomène étudié.
 A faible température T_0 , cette énergie $E(z)$ organise fortement la distribution.
 A haute température T_0 , l'agitation thermique l'emporte et le phénomène lié à l'énergie $E(z)$ n'est plus décisif.

⑦ Concentration molaire $c_g(z) = \frac{n}{V} = \frac{P(z)}{RT_0} = \frac{P_0}{RT_0} e^{-z/H}$

donc $c_{g0} = \frac{P_0}{RT_0}$ est la concentration molaire au niveau du sol.

(3)

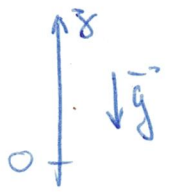
⑧ Dans tout ce qui suit, on étudie dans le référentiel galiléen du laboratoire, une bille de rayon R_b placée dans l'eau.

Forces exercées :

- poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$
- poids $\vec{P} = +\mu_b V_b \vec{g}$
- force visqueuse $\vec{f} = -6\pi \eta R_b \vec{v}$

⑨ Principe Fondamental de la dynamique à une {bille} :

$$m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = (\mu_b - \mu_e) V_b \vec{g} - 6\pi \eta R_b \vec{v}$$



En projetant sur $\vec{u}_z$: $m_b \frac{dv}{dt} + \alpha v = (\mu_b - \mu_e) V_b g = \alpha v_e$

Solution : $v(t) = A e^{-t/\tau} + v_e$ avec $\begin{cases} v_e = \frac{(\mu_b - \mu_e) V_b g}{\alpha} = \frac{m^* g}{\alpha} \\ m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b : \text{masse apparente} \end{cases}$

et $v(0) = 0 = A + v_e$

donc $v(t) = v_e [1 - e^{-t/\tau}]$ avec $\tau = \frac{m_b}{\alpha}$

AN : $\tau = \frac{m_b}{\alpha} \approx \frac{4 \cdot 10^{-17}}{4 \cdot 10^{-9}} \approx 10^{-8} \text{ s} \rightarrow$ régime permanent quasi-immédiat.

$v_e = \frac{m^* g}{\alpha} \approx \frac{200 \cdot 3 \cdot 10^{-20} \cdot 10}{4 \cdot 10^{-9}} \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1} \rightarrow$ très lent !
(quasi-statique à l'échelle de l'expérience)

⑩ $[j_c] : [c v] : \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} : \text{flux surfacique de particules}$

Coefficient de diffusion (loi de Fick) : D en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Equilibre macroscopique à T_0 : la pesanteur est compensée par la diffusion qui remonte le gradient de concentration. A l'échelle microscopique, les collisions successives compensent en moyenne la chute gravitaire.

On écrit donc $\vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0}$, soit $D \frac{\partial c}{\partial z} + c v_e = 0$

Solution : $c(z) = c_0 e^{-z/H_b}$

avec $H_b = \frac{D}{v_e}$ en $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}} : \text{m}$ (cohérent) - $H_b = \frac{D \alpha}{m^* g} = \frac{6\pi \eta R_b D}{\alpha m^* g}$

(4)

(11) $E_p^*(z) = m^* g z$ si la référence d'énergie potentielle est prise en $z=0$.

On écrit $e^{-z/H_b} = e^{-E_p^*/k_B T_0} \Leftrightarrow E_p^* = m^* g z = k_B T_0 z / H_b$

$\Leftrightarrow m^* g 6\pi\eta R_b D = k_B T_0 m^* g \Leftrightarrow \boxed{D = \frac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b}}$

Remarque: en utilisant la valeur fournie de k_B ,

on trouve, à $T_0 = 300\text{K}$, $D \approx 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ ce qui est cohérent pour une diffusion particulière dans un liquide.

On note aussi que cette estimation correspond alors à $H_b \approx 50 \mu\text{m}$, d'après (10).

(12) Conservation de la matière sur une colonne infinie:

$$N = 13000 = \int_0^{+\infty} c_0 e^{-z/H_b} dz S = c_0 S (-H_b) \left[e^{-z/H_b} \right]_0^{+\infty} = c_0 S H_b.$$

On en déduit: $\boxed{c_0 = \frac{N}{S H_b}}$

(13) Dans une fine couche d'épaisseur e , on compte: $n(z) \approx c(z) \cdot e \cdot S$.

D'après (10) on a donc $\ln(n(z)) = \ln(e S c_0) - z/H_b = \ln\left(\frac{e N}{H_b}\right) - z/H_b$.

AN: $H_b = \frac{1000}{24} \approx 42 \mu\text{m}$, cohérent avec la remarque en (11).

AN: $\ln\left(\frac{e N}{H_b}\right) = 4,7$ donc $\underline{e \approx 0,36 \mu\text{m}}$: il faut viser précisément!

Critique: sur la hauteur $h_1 = 100 \mu\text{m}$, et sachant que $H_b \approx 42 \mu\text{m}$: milieu non infini!

(14) On suppose H_b égale à la valeur obtenue par Jean PERRIN.

$H_b = \frac{6\pi\eta R_b}{m^* g} \cdot \frac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b} = \frac{k_B T_0}{m^* g} \rightarrow \boxed{k_B = \frac{m^* g H_b}{T_0}}$ AN: $k_B \stackrel{\text{EXP1}}{\approx} 0,9 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

Cette estimation présente un écart de 40% avec la valeur tabulée.

Causes possibles d'erreurs expérimentales: - mesure de position $z \in [5; 100] \mu\text{m}$ -
- comptage de $n(z)$ sur $e = 0,36 \mu\text{m}$ -

odg ok -

(5)

(15) Principe Fondamental de la Dynamique à une {bille} dans R galiléen:

$$m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_c - \alpha \vec{v} \quad (E_L)$$

En l'absence de F_c , on a $m_b \frac{dv}{dt} + \alpha v = 0 \rightarrow v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$
avec $\tau = \frac{m_b}{\alpha} = 10^{-8} \text{ s}$

(16) $\frac{d(xv)}{dt} = x \frac{dv}{dt} + \boxed{\frac{dx}{dt}} \cdot v$ soit $\boxed{x \frac{dv}{dt} = \frac{d(xv)}{dt} - v^2}$

(17) Energie cinétique moyenne: $\langle E_c \rangle = \langle \frac{1}{2} m_b v^2 \rangle = \frac{1}{2} m_b u^2$

D'après le théorème d'équipartition de l'énergie à 1 dimension:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m_b u^2 = \frac{X}{2} k_B T_0, \text{ avec } X \text{ le nombre de termes quadratiques dans l'énergie totale moyenne (1D} \Rightarrow X=1).$$

Remarque: résultat admis ici (en effet, hors-programme en PC).

Commentaire: on voit que la vitesse se augmente avec T_0 , ce qui correspond à la description de L-G Gouy.

(18) On multiplie l'équation (E_L) par x et on calcule la moyenne:

$$\left\langle m_b x \frac{dv}{dt} \right\rangle = \underbrace{\langle x F_c \rangle}_0 - \langle \alpha x v \rangle$$

$$\text{donc } \left\langle x \frac{dv}{dt} \right\rangle + \frac{\alpha}{m_b} \langle x v \rangle = \frac{d\varphi}{dt} - \langle v^2 \rangle + \frac{\alpha}{m_b} \varphi = 0.$$

D'où: $\boxed{\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} \varphi = u^2}$ avec $\begin{cases} \varphi(0) = 0 = A \cdot 1 + \tau u^2 \rightarrow A = -\tau u^2 \\ \varphi(t) = A e^{-t/\tau} + \tau u^2 \end{cases}$

On en déduit:

$$\Psi(t) = \sum u^2 (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{\cancel{m} b}{\alpha} \frac{k_B T_0}{\cancel{m} b} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6)$$

$$(19) \quad \left\langle \frac{dx^2}{dt} \right\rangle = \left\langle 2x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left\langle 2x v \right\rangle = 2 \Psi \stackrel{\text{ergodique}}{=} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

On intègre: $\Psi(t) = \int 2 \Psi(t) dt = \frac{2k_B T_0}{\alpha} (t + \tau e^{-t/\tau}) + C^{te}$

→ condition initiale: $\Psi(t=0) = \langle x^2(t=0) \rangle = 0 = \frac{2k_B T_0}{\alpha} (0 + \tau) + C^{te}$

Solution générale: $\Psi(t) = \frac{2k_B T_0}{\alpha} [t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)]$

donc $\Psi(t) \approx \frac{2k_B T_0}{\alpha} (t - \tau) \approx \boxed{\frac{2k_B T_0}{\alpha}} t = \langle x^2 \rangle$ ↓ décroît rapidement!

AN: $D_x \approx \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{4,5 \cdot 10^{-9}} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$

D_x (en m^2/s): coefficient de diffusion du modèle de Langevin -

Si on utilise k_B tabulé, ce résultat est cohérent avec le modèle de sédimentation.

(20) Le grand nombre de mesures indépendantes statistiquement réalisées par PERRIN permet de se placer dans l'hypothèse ergodique des calculs précédents. Expérimentalement (Fig 2), la pente D_x est estimée par:

$$D_x = \frac{\Delta \langle x^2 \rangle}{\Delta t} \approx \frac{190}{120} (10^{-6})^2 \approx \underline{1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}}$$

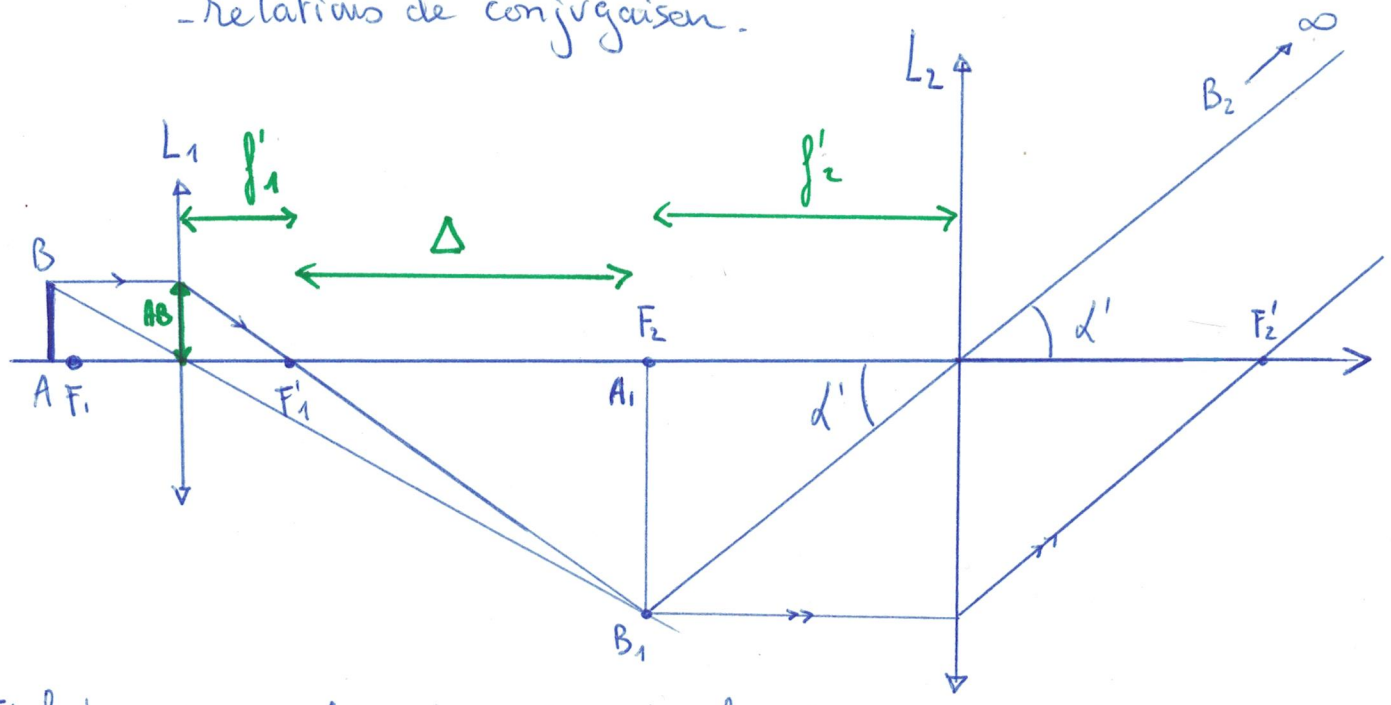
On peut en déduire une seconde estimation de la constante de Boltzmann:

$$\underline{k_B^{\text{EXP2}} \approx \frac{\alpha D_x}{2 T_0} = 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} : \text{valeur cohérente avec la valeur tabulée et plus juste que la première méthode.}$$

(21) Conditions de Gauss: angles faibles et rayons proches de l'axe optique.

- Propriétés:
- stigmatisme ($A_{\text{ponctuel}} \rightarrow A'_{\text{ponctuel}}$)
 - aplanétisme ($AB \text{ transversale} \rightarrow A'B' \text{ transversale}$)
 - relations de conjugaison.

(22)



(23) Il faut une image A_1B_1 placée dans le plan focal objet de L_2 , afin d'obtenir une image à l'infini en sortie de microscope*.

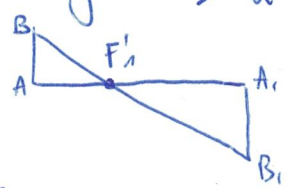
Au vu du montage proposé (F_2 en aval de L_1), l'image A_1B_1 doit être réelle, donc il faut $\overline{AF_1} > 0$.

Par ailleurs, $\Delta \gg f_1'$ ici, donc A_1B_1 est éloigné de L_1 : pour cela il faut donc que l'objet AB soit proche de F_1 .

* ce qui permet à l'œil d'être au repos, et de voir net sans accommodation.

(24) Puissance $P_i = \frac{d'}{AB}$ et petits angles $\Rightarrow d' \approx \tan d' = \frac{A_1B_1}{f_2'}$.

Et d'après Thalès, on peut écrire



soit $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{\Delta}{f_1'}$

Donc $P_i = \frac{d'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} \cdot \frac{1}{f_2'} = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}$

AN: $AB \approx 2R_b$ et il faut $d' > d_{\text{résol œil}} \approx \frac{1}{60}$ (résolution de l'œil humain).

$\rightarrow$ il faut alors $P_i > \frac{d_{\text{résol œil}}}{2R_b} \approx 10^3 \delta$.

Or pour notre microscope usuel, $P_i = \frac{0,15}{10^{-3} \cdot 0,02} = 7500 \rightarrow$ suffisant!