Auteurs : Jean-Baptiste Paire
Jean-Marc Vince

Physique d'un ballon de football

I – Nombre de Reynolds et coefficient de traînée

1. On calcule $\boxed{\mathrm{R}_e = 4,4.10^5}$ c'est donc le deuxième modèle de calcul de la force de traînée qu'il faudra prendre en compte
2. On évalue le module de l'accélération avec la différence des vitesses consécutives :

$$\boxed{|a_i| = \frac{|v_{i+1} - v_i|}{\tau}}$$

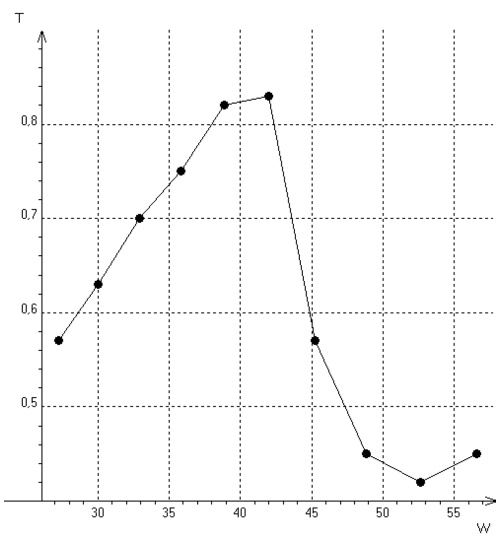
3. À $t = t_i$, l'application du TRC au ballon selon l'axe vertical descendant donne, en écrivant $\overrightarrow{a_i} = a_i\overrightarrow{e_z}$ avec $a_i > 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{T}_i} = -\mathrm{T}_i\overrightarrow{e_z}$ au cours de la chute libre :

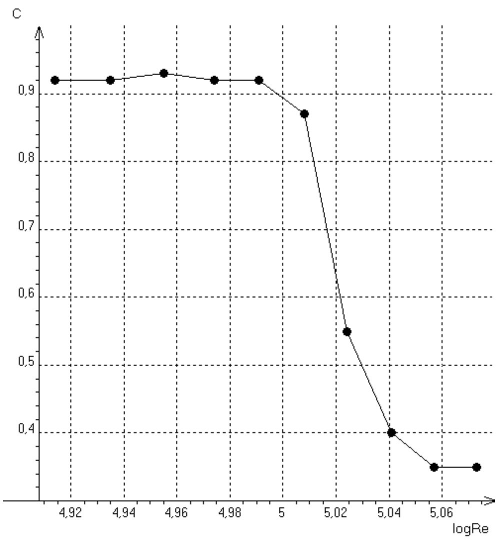
$$\boxed{ma_i = mg - \mathrm{T}_i}$$

4. En remarquant que $v_{i+1} > v_i$, on peut écrire $\mathrm{T}_i = m(g - a_i) = m(g - \dfrac{v_{i+1} - v_i}{\tau})$ et calculer aussi C avec $\mathrm{C} = \dfrac{8\mathrm{T}_i}{\rho\pi\mathrm{D}^2\mathrm{V}_i^2}$. D'où le tableau :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i^2 (m^2.s^{-2})	27,25	30,03	32,90	35,86	38,90	42,02	45,24	48,80	52,61	56,58
T_i (N)	0,57	0,63	0,70	0,75	0,82	0,83	0,57	0,45	0,42	0,45
C	0,92	0,92	0,93	0,92	0,92	0,87	0,55	0,40	0,35	0,35
$\log_{10}(\mathrm{R}_e)$	4,914	4,935	4,955	4,974	4,991	5,008	5,024	5,041	5,057	5,073

On peut noter un problème de nombres de chiffres significatifs pour $\log_{10}(\mathrm{R}_e)$, où 4 chiffres significatifs sont demandés pour des données avec 2 chiffres significatifs ! !
À partir du 6ème point on constate une chute brutale de la traînée et du coefficient C conforme à l'existence d'un nombre de Reynolds critique au voisinage de 10^5. Pour les courbes,on obtient :





II – Écoulement d'un fluide visqueux le long d'une paroi solide

5. Avec les deux relations données par l'énoncé, on obtient $\boxed{\delta(x) = \sqrt{\frac{nx}{\mathrm{U}}}}$. La géométrie plane peut décrire correctement le ballon si son diamètre D est grand devant δ et pour des valeurs de x telles que x D.

6. $\boxed{\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{nx}{\mathrm{U}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}e(x)}} \ll 1}$

7. Pour un écoulement incompressible en régime stationnaire, on écrit div $\overrightarrow{\mathrm{V}} = 0$. En coordonnées cartésiennes on obtient donc $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ soit avec l'approximation donnée par l'énoncé : $\frac{u}{x} + \frac{v}{\delta} = 0$, ce qui donne $v = -\frac{\delta}{x} u$ et donc $\boxed{|v| \ll |u|}$ avec le résultat de la question précédente.

8. $\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{\mathrm{V}})} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\overrightarrow{e_y}$ comme $\frac{1}{\delta} \gg \frac{1}{x}$, on en déduit que $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et de même pour v, ainsi on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{\mathrm{V}})} \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\overrightarrow{e_y}}$$

En régime stationnaire, l'équation de Navier-Stokes projetée selon $\overrightarrow{e_x}$ se réduit à

$$(\overrightarrow{\mathrm{V}}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + n\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

c'est à dire

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + n\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)}$$

III – Couche limite laminaire sans gradient de pression

9. À l'aide de $\frac{\mathrm{U}}{n} = \frac{\mathrm{R}_e(x)}{x}$, on trouve $\boxed{\theta(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\mathrm{U}}{n}} = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}$

Avec le résultat de la question 6., où $\sqrt{\mathrm{R}_e(x)} = \frac{x}{\delta(x)}$ a été établi, on en déduit que $\boxed{\theta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)}}$. θ est donc une variable sans dimension.

10. Pour $y \to 0$, les vitesses u et v doivent s'annuler. Or pour $y \to 0$, $\theta \to 0$, on en déduit donc que $\boxed{f(0) = 0 \text{ et } g(x,0) = 0 \text{ pour tout } x}$

Pour $y \to \infty$, $u \to \mathrm{U}$ et $v \to 0$ ainsi $\boxed{f(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} 1}$ et $\boxed{g(x,\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} 0 \text{ pour tout } x}$

11. On calcule $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = \mathrm{U}f'(\theta)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y$ avec $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y = -\frac{y}{2x^{3/2}}\sqrt{\frac{\mathrm{U}}{n}} = -\frac{y}{2x^2}\sqrt{\mathrm{R}_e(x)} = -\frac{\theta}{2x}$ d'où

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = -\frac{\mathrm{U}\theta}{2x}f'(\theta)}$$

De même, $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x = \mathrm{U}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \mathrm{U}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)_x\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x$ avec $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x = \frac{\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}{x}$ ce qui donne

$$\boxed{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x = \mathrm{U}\frac{\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}{x}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)_x}$$

On trouve de la même manière

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = \mathrm{U}\frac{\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}{x}f'(\theta)}$$

Et alors $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_x = \mathrm{U}\dfrac{\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}{x}f''(\theta)\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x$ avec toujours $\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x = \dfrac{\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}{x}$ ce qui donne

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_x = \mathrm{U}\frac{\mathrm{R}_e(x)}{x^2}f''(\theta)}$$

12. L'écoulement incompressible permet d'écrire $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_x = 0$ ce qui donne à l'aide des relations précédentes $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)_x = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}\theta f'(\theta)$. En intégrant (par partie pour le second membre) cette relation entre 0 et θ quelconque on obtient alors

$$g(x,\theta) - g(x,0) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}\left[\theta f(\theta) - \int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

or pour tout x, $g(x,0) = 0$, ainsi

$$\boxed{g(x,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}\left[\theta f(\theta) - \int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]}$$

qui est bien le résultat demandé avec $\underline{\alpha = 1/2}$.

13. On écrit ici l'équation (1) avec $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = 0$ et en utilisant les relations trouvées à la question 11. ce qui donne

$$-\frac{\mathrm{U}^2}{2x}\theta f(\theta)f'(\theta) + \mathrm{U}^2\frac{\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}{x}g(x,\theta)f'(\theta) = n\frac{\mathrm{U}\mathrm{R}_e(x)}{x^2}f''(\theta)$$

en tenant compte de $n\mathrm{R}_e(x) = \mathrm{U}x$, $\alpha = 1/2$ et en simplifiant par $\dfrac{\mathrm{U}^2}{x}$ on obtient

$$-\alpha\theta f(\theta)f'(\theta) + \sqrt{\mathrm{R}_e(x)}g(x,\theta)f'(\theta) = f''(\theta)$$

En utilisant alors le résultat de la question 12. : $\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}g(x,\theta) = \alpha\left[\theta f(\theta) - \int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$, on en déduit

$$\boxed{f''(\theta) + \alpha f'(\theta)\int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0}$$

14. L'équation de Navier-Stokes projetée selon $\overrightarrow{e_x}$ se ramène alors à une équation différentielle avec comme seule variable θ ce qui légitime de considérer u comme fonction de cette seule variable.

15. Si $\dfrac{y}{\sqrt{x}} = \dfrac{y^*}{\sqrt{x^*}}$ alors $\theta(\mathrm{M}) = \theta^*(\mathrm{M}^*)$ et donc $\boxed{u(\mathrm{M}) = u(\mathrm{M}^*)}$. Invariance de u, tant que y reste proportionnel à $\sqrt{x}$ d'où le nom d'invariance d'échelle.

16. Dans la couche limite (là où u dépend de θ, ici linéairement avec le modèle choisi), on écrit $f(\theta) = \dfrac{3}{10}\theta$ et donc $u(x,y) = \dfrac{3}{10}\mathrm{U}\theta$ soit

$$\boxed{u(x,y) = \frac{3}{10}\mathrm{U}\frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{R}_e(x)}}$$

La transition à lieu pour $\theta \simeq 3$ donc $\mathrm{Y}(x) \simeq 3\delta(x)$.

17. On a déja vu que $f(0) = 0$ et l'équation du 13. donne $\underline{f''(0) = 0}$ car f est bornée et donc $\int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$. De même en dérivant par rapport à θ l'équation du 13., on obtient $f'''(0) = 0$ et comme $f'(0) = a$, le développement limité de $f(\theta)$ au voisinage de zéro et à l'ordre 4 se réduit à :

$$\boxed{f(\theta) = a\theta + b\theta^4 + o(\theta^4)}$$

Pour obtenir b, on écrit l'équation de Blasius au voisinage de $\theta = 0$ en y gardant que les termes de degré 2 en θ (termes de plus bas degré en θ) on obtient, compte tenu de $f'(\theta) = a + 4b\theta^3 + o(\theta^3)$ et $f''(\theta) = 12b\theta^2 + o(\theta^2)$,

$$\alpha f'(\theta)\int_0^\theta (a\xi + b\xi^4)\mathrm{d}\xi = \alpha a^2\frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

ce qui donne $12b + \dfrac{a^2}{4} = 0$ donc

$$\boxed{b = -\frac{a^2}{48}}$$

IV – Décollement de la couche limite laminiare

18. Sur la bissectrice $\psi = \dfrac{\alpha}{2}$ donc $(m+1)\psi = (m+1)\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ ainsi $\varphi(r, \dfrac{\alpha}{2}) = 0$ et ne dépend pas de r, la vitesse radiale $(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})$ est donc nulle conformément à l'antisymétrie de l'écoulement par rapport à cet axe.

19. Écoulement à potentiel : $\overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ et écoulement incompressible : div $\overrightarrow{\mathrm{V}} = 0$ donc div $(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi) = 0$, c'est à dire $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ (Équation de Laplace).
Avec $\varphi(r,\psi) = \mathrm{F}(r)\cos\left[(m+1)\psi\right]$, on calcule

$$\Delta\varphi = \left[\mathrm{F}''(r) + \frac{\mathrm{F}'(r)}{r} - \frac{1}{r^2}(m+1)^2\mathrm{F}(r)\right]\cos\left[(m+1)\psi\right]$$

L'équation de Laplace impose $\Delta\varphi = 0$ pour tout couple (r,ψ) donc

$$\left[\mathrm{F}''(r) + \frac{\mathrm{F}'(r)}{r} - \frac{1}{r^2}(m+1)^2\mathrm{F}(r)\right] = 0 \text{ pour tout } r$$

En cherchant une solution de la forme $\mathrm{F}(r) = k_1 r^p$, $\mathrm{F}'(r) = pk_1r^{p-1}$ et $\mathrm{F}''(r) = p(p-1)k_1r^{p-2}$, l'équation de Laplace donne alors

$$p(p-1) + p - (m+1)^2 = 0$$

soit $\boxed{p = \pm(m+1)}$

20. On calcule $\overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ pour obtenir :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{V}} = k_1r^{p-1}\left[p\cos\left[(m+1)\psi\right]\overrightarrow{e_r} - (m+1)\sin\left[(m+1)\psi\right]\overrightarrow{e_\theta}\right]}$$

Si m tend vers 0, la solution $p = -(m+1)$ est telle que r^{p-1} tend vers r^{-2} qui présente une divergence non acceptable physiquement quand $x \to 0$ (au voisinage de la plaque). La solution à retenir est donc $\underline{p = m+1}$ c'est à dire $\underline{p = 1}$ quand m tend vers 0.

21. Pour $\psi = 0$, l'expression de la vitesse obtenue à la question précédente donne

$$\overrightarrow{\mathrm{V}} = k_1(m+1)r^m\overrightarrow{e_r}$$

mais pour $\psi = 0$, $r = x$ et $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_x}$ si bien qu'on peut écrire

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{V}} = k_2 x^m \overrightarrow{e_x} \text{ où } k_2 = (m+1)k_1}$$

22. On écrit la relation de Bernouilli : $\mathrm{P}+\dfrac{1}{2}\rho\mathrm{V}^2 = $ cte sur la paroi $\psi = 0$ (en négligeant le terme de pesanteur), qu'on dérive par rapport à x pour obtenir

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{1}{2}\rho 2\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = 0$$

ce qui se traduit, sur la surface $\psi = 0$ par

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = -\rho k_2^2 m x^{2m-1}$$

qui est bien positif car $m < 0$.
<u>Au voisinage de la plaque $\psi = 0$ il existe bien un gradient de pression dirigé vers les x croissants.</u>

23. Il faut évaluer $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = mk_2^2 x^{2m-1}$ en utilisant $\mathrm{U}^2(x) = k_3^2 x^{2m}$, ce qui donne

$$x^{2m-1} = \frac{\mathrm{U}^2(x)}{k_3^2 x} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{mk_2^2}{xk_3^2}\mathrm{U}^2(x)$$

En injectant dans l'équation de Navier-Stokes projetée sur $\overrightarrow{e_x}$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = n\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{mk_2^2}{xk_3^2}\mathrm{U}^2(x)$$

qui est l'expression demandée avec

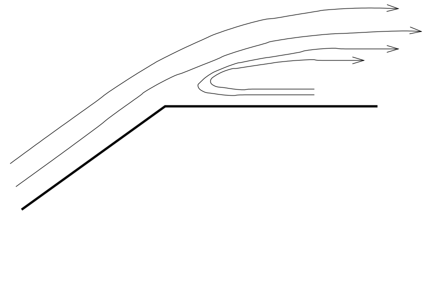
$$\boxed{\lambda(x) = \frac{mk_2^2}{xk_3^2} = \frac{m(m+1)^2k_1^2}{xk_3^2}}$$

24. Si $m = 0$, on retrouve $\lambda(x) = 0$ et le cas du III.avec la même allure de courbe pour $f(\theta)$ que celle obtenue ici pour les plus petites valeurs de m ($m = -0,02$ ici).

25. De même à l'aide de l'équation de Blasius généralisée, de $f(0) = 0$ et de $\int_0^\theta f(\xi)\mathrm{d}\xi \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$, on obtient directement $m + f''(0) = 0$ soit

$$\boxed{f''(0) = -m > 0}$$

26. Si $f'(0) < 0$ alors il existe une zone pour laquelle $f(\theta) < 0$. Dans cette zone, l'écoulement s'effectue avec $u < 0$ si $\mathrm{U} > 0$. Il existe alors une zone, dite de recirculation, dans la couche limite comme le montre le schéma ci-contre. Cela se produit pour $\alpha > \alpha_c = \dfrac{\pi}{m_c+1}$ c'est à dire $\alpha_c - \pi = \dfrac{-\pi m_c}{m_c+1}$. Avec $m_c = -0,09$, on trouve $\beta_c = \alpha_c - \pi = 18^o$.



V – La transition laminiare/turbulent et le nombre de Reynolds critique

27. Ici on lit sur les courbes les valeurs de $\mathrm{C}_{\max}$, $\mathrm{C}_{\min}$ et R_{e_c} et on calcule $\mathrm{U}_c = \dfrac{n}{\mathrm{D}}\mathrm{R}_{e_c}$, on obtient le tableau :

	$\mathrm{C}_{\max}$	$\mathrm{C}_{\min}$	R_{e_c}	U_c (m.s^{-1})
Ballon	0,72	0,26	$10^{5,1}$	8,0
Sphère lisse	0,51	0,16	$10^{5,5}$	20

28. Le coefficient de traînée est maximun lorsque le décollement de la couche limite à lieu au sommet de la sphère. Lorsque le décollement est retardé par la turbulence « à l'arrière » du ballon, le coefficient de traînée diminue et atteint une valeur minimale.
29. La transition laminaire/turbulent se fait donc à vitesse plus faible pour un ballon rugueux.
30. Pour diminuer la traînée sans atteindre de très grandes vitesses du ballon, on a alors intérêt à ne pas le prendre parfaitement lisse. C'est ce qu'on retrouve sur les balles de golf et les combinaisons de ski des skieurs de vitesse. Le vent et l'effet Magnus peuvent aussi influencer la trajectoire du ballon.