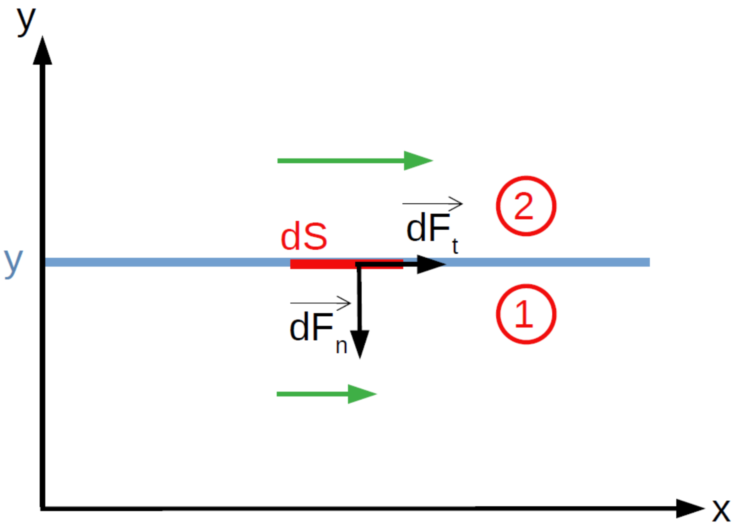
LP 08 : Notion de viscosité d'un fluide, écoulement visqueux

- **Niveau** : CPGE / L2
- **Prérequis** :
  - Cinématique des fluides
  - Equation de conservation de la masse
  - Modèle du fluide parfait
  - Equation d'Euler
  - Phénomènes de diffusion

I - 1) Définition à travers une force tangentielle de "frottements"

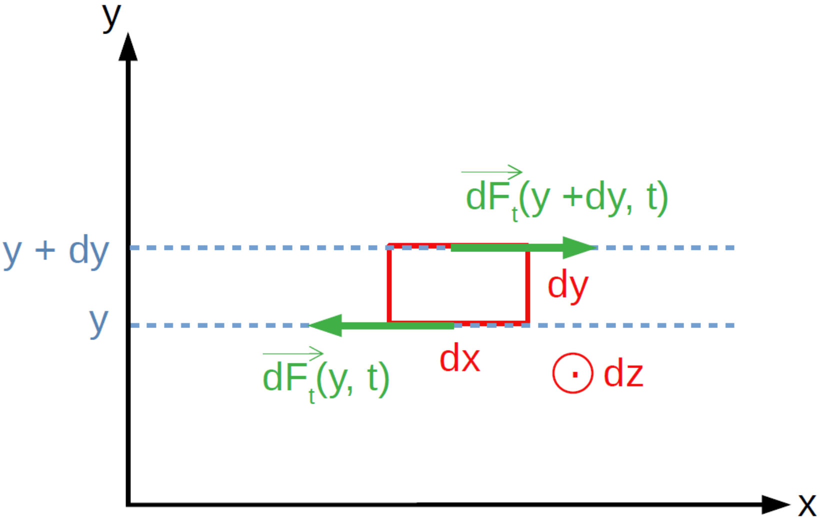


I - 1) Définition à travers une force tangentielle de "frottements"

Ordres de grandeur :

	viscosité η ($Pl = Pa.s$)
air	$\eta_{air} = 10^{-5}\ Pl$
eau	$\eta_{eau} = 10^{-3}\ Pl$
glycérine	$\eta_{gly} = 1\ Pl$
miel	$\eta_{miel} = 1\ Pl$
magma	$\eta_{magma} = 10^{20}\ Pl$

I - 2) Force volumique, équation de Navier-Stokes



I - 2) Force volumique, équation de Navier-Stokes

On obtient les nouvelles conditions aux limites au niveau d'une paroi :

- $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$
- continuité de la contrainte normale, i.e. de la pression
- continuité de la contrainte tangentielle $d\vec{F}_{paroi} = \eta dS \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{paroi} \vec{e}_x$ pour un élément dS de surface dans le cas précédent

I - 2) Force volumique, équation de Navier-Stokes

Remarque : dans le cas d'un fluide compressible, la force volumique de viscosité s'écrit :

$$\vec{f_v} = \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \overrightarrow{grad}(div \vec{v})$$

avec ζ le 2^{eme} coefficient de viscosité

I - 3) Analyse de l'équation de Navier-Stokes

Ordres de grandeur :

	viscosité cinématique ν ($m^2.s^{-1}$)
air	$\nu_{air} = 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
eau	$\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$
glycérine	$\nu_{gly} = 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$
miel	$\nu_{miel} = 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$

I - 3) Analyse de l'équation de Navier-Stokes

Remarque :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

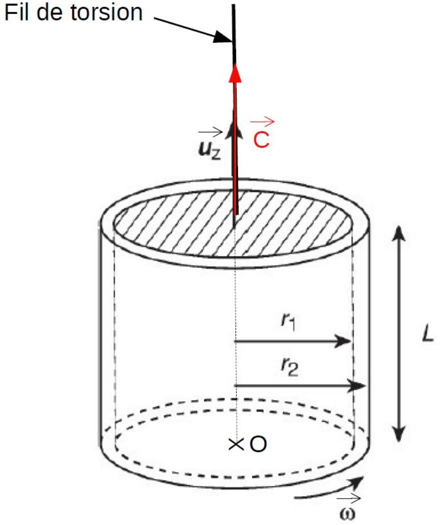
où $\tau_{diff} = L^2/\nu$ et $\tau_{conv} = L/V$

I - 3) Analyse de l'équation de Navier-Stokes

<u>**Ordres de grandeur**</u> :

- voiture sur l'autoroute :
  $L \approx 3\ m$, $V \approx 30\ m.s^{-1}$, $\nu = \nu_{air} \approx 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
  $\Rightarrow$Re $\approx 10^7 \gg 1$, viscosité négligeable
- grain dans un bassin de sédimentation :
  $H = 1\ m$, $\tau \approx 1$ jour, $V = H/\tau \approx 10^{-5}\ m.s^{-1}$,
  $r \approx 1\ \mu m$, $\nu = \nu_{eau} \approx 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$
  $\Rightarrow$Re $\approx 10^{-5} \ll 1$, viscosité domine

II - Mesure de viscosité : le viscosimètre de Couette



système : - fluide incompressible, masse volumique ρ, viscosité η
- entre deux cylindres d'axes (Oz), de rayons r_1 et r_2
- cylindre 2 en rotation de vecteur $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$
- cylindre 1 immobile en régime stationnaire, fait un angle α_{eq} par rapport à sa position initiale

II - Mesure de viscosité : le viscosimètre de Couette

On se place en coordonnées cylindrique

- invariance du système par rotation d'angle θ d'axe (Oz).
- $L \gg r_1, r_2 \Rightarrow$ invariance par translation selon (Oz)

$\Rightarrow p = p(r)$, $\vec{v} = \vec{v}(r)$

- fluide incompressible : $div\,\vec{v} = 0$ i.e. :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Or $\vec{v} = \vec{v}(r)$ d'où $\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$ i.e. $rv_r(r) = cste$.
Or par condition d'imperméabilité en $r = r_1$: $v_r(r_1) = 0$, d'où $\forall r$, $rv_r(r) = r_1 v_r(r_1) = 0$ i.e. $v_r(r) = 0\ \forall r$.

II - Mesure de viscosité : le viscosimètre de Couette

- Condition d'adhérence en $r = r_1$:
$v_\theta(r_1) = 0 \Rightarrow K = -\frac{Qr_1^2}{2}$

- Condition d'adhérence en $r = r_2$:
$v_\theta(r_2) = \omega r_2 \Rightarrow \frac{Q}{2}\left(r_2 - \frac{r_1^2}{r_2}\right) = \omega r_2$ i.e. $Q = \frac{2\omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$

D'où :

$$v_\theta(r) = \frac{\omega r_2^2}{r}\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$