Compte-rendu LP 08 : Notion de viscosité d'un fluide - écoulements visqueux

Cédric BLAIZE et Yann MONCEAUX

Table des matières

Objectifs de la leçon

L'objectif principal de cette leçon est de donner une première approche de la notion de viscosité en mécanique des fluides. Elle s'adresse donc à un public de niveau CPGE / L2 et il faut alors introduire les concepts de manière simple et intuitive pour aboutir à l'équation de Navier-Stokes. Il est important de mettre en évidence ici la notion de diffusion de quantité de mouvement par effets visqueux. Enfin l'équation de Navier-Stokes ne pouvant pas être résolue, il est important de mettre en évidence, à partir du nombre de Reynolds ou de la géométrie de l'écoulement, le fait que dans de nombreux cas cette équation peut être simplifiée et qu'on arrive tout de même à résoudre les problèmes qu'on se pose.

Niveau : CPGE / L2

Prérequis :

- Cinématique des fluides
- Equation de conservation de la masse
- Modèle du fluide parfait
- Equation d'Euler
- Phénomènes de diffusion

Introduction

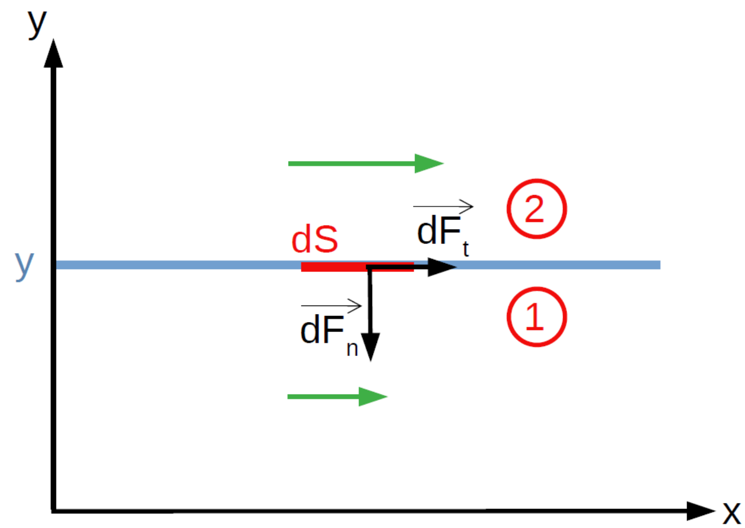
Il a été vu dans un cours précédent le modèle de l'écoulement parfait, cependant ce modèle présente de nombreuses limites notamment dans la prise en compte des effets aux interfaces, on peut pense au paradoxe de d'Alembert par exemple. Une amélioration de ce modèle consiste en la prise en compte de la viscosité du fluide dont on peut observer un effet à travers une manip simple :
→ une burrette contient uniquement de l'eau tandis qu'une autre contient un mélange eau-glycérol à 5/6 d'eau en volume.
On observe que le mélange s'écoule plus lentement que l'eau pure, or dans un modèle ne prenant en compte que l'action de pesanteur, la masse volumique n'intervient pas dans l'équation déterminant la vitesse donc les deux fluides devraient s'écouler à la même vitesse. Il y a donc une action autre que la pesanteur qui freine l'écoulement, il s'agit de la viscosité du fluide. On va s'intéresser ici à développer le modèle d'écoulement associé aux effets visqueux.

1 Notion de viscosité

1.1 Définition à travers une force tangentielle de "frottements"

On se place dans un référentiel galiléen.
Considérons un écoulement inhomogène $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$, incompressible. On suppose que l'écoulement

est visqueux et possède une viscosité notée η qu'on introduira juste après.
Schématisons l'écoulement de la manière suivante :



Comme on a pu le constater dans le cas des burettes, un fluide visqueux semble subir une force de "frottements" lors de son écoulement ce qui le ralentissait dans le cas de la burette.

Ici en considérant la viscosité comme une action de frottements, on voit bien que si au niveau de l'interface, le fluide dans la couche 2 s'écoule plus vite que celui dans la couche 1 il va alors entraîner le fluide de la couche 1 et inversement, le fluide de la couche 1 va freiner celui de la couche 2.
Cela peut se résumer dans l'expression d'une contrainte tangentielle :

$$d\vec{F}_{1\to 2} = \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$$

On voit bien dans cette expression que la contrainte tangentielle tend à accélérer le fluide de la couche 1 si le fluide de la couche 2 s'écoule plus rapidement car au niveau de l'interface on aurait $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$.

Remarques :
- La force de viscosité est introduite par une inhomogénéité de vitesse.
- η est appelé coefficient de viscosité dynamique, il s'exprime en Poiseuille $(1Pl = 1Pa.s)$

On pourra notamment retenir quelques ordres de grandeurs de η :

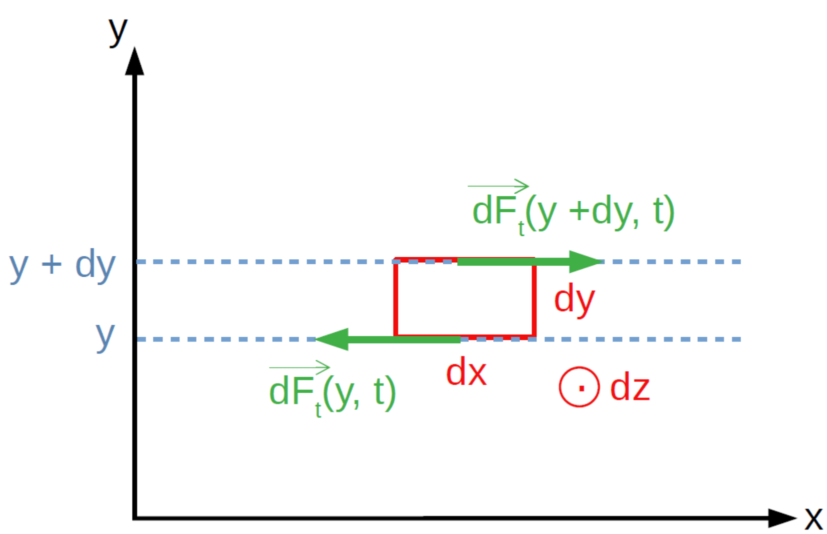
	viscosité η $(Pl = Pa.s)$
air	$\eta_{air} = 10^{-5}\ Pl$
eau	$\eta_{eau} = 10^{-3}\ Pl$
glycérine	$\eta_{gly} = 1\ Pl$
miel	$\eta_{miel} = 1\ Pl$
magma	$\eta_{magma} = 10^{20}\ Pl$

Remarques :
Le résultat précédent s'applique dans le cas des fluides dits newtoniens i.e. pour lesquels la contrainte visqueuse est proportionelle aux déformations du fluide. Cela impliquera notamment que η est une constante.

1.2 Force volumique et équation de Navier-Stokes

De même qu'on avait établit l'expression d'une action volumique des forces de pression, on va exprimer la densité volumique de contrainte correspondant aux contraintes visqueuses.

Considérons une particule de fluide p de volume $d\tau = dxdydz$ dans l'écoulement précédent.



Sur p, la force totale dûe à la viscosité s'écrit :

$$d\vec{F}_{tot} = d\vec{F}_t(y + dy, t) + d\vec{F}_t(y, t)$$

Or d'après l'expression de la force tangentielle donnée précédemment, on a
$d\vec{F}_t(y + dy, t) = \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t)\vec{e}_x$ avec $dS = dxdz$.
De plus d'après le principe des actions réciproques,
$d\vec{F}_t(y, t) = -d\vec{F}_{p\to fluide}(y, t) = -\eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t)\vec{e}_x$.
D'où :

$$d\vec{F}_{tot} = \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t)\vec{e}_x - \eta dS \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t)\vec{e}_x$$

i.e.

$$d\vec{F}_{tot} = \eta dS dy \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y, t)\vec{e}_x$$

Soit

$$d\vec{F}_{tot} = \eta d\tau \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y, t)\vec{e}_x$$

avec $d\tau = dxdydz$

On en déduit alors l'expression de la force volumique :

$$\vec{f_v} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\vec{e}_x$$

On généralisera cette expression dans le cas d'un écoulement à 3 dimensions :

$$\vec{f_v} = \eta \Delta \vec{v}$$

On peut alors obtenir l'équation du mouvement du fluide à partir de l'équation d'Euler pour laquelle on rajoute le terme de viscosité :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{vol}$$

C'est l'équation de Navier-Stokes.

Remarque :
Souvent on aura $\vec{f}_{vol} = \rho \vec{g}$, l'action volumique de pesanteur.

Attention :
Cette équation est valable pour un écoulement incompressible, on a donc en plus de cette équation : $div(\vec{v}) = 0$, et le système doit être étudié dans un référentiel galiléen.

On obtient les nouvelles conditions aux limites au niveau d'une paroi :
- $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$
- continuité de la contrainte normale, i.e. de la pression
- continuité de la contrainte tangentielle $d\vec{F}_{paroi} = \eta dS \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{paroi} \vec{e}_x$ pour un élément dS de surface dans le cas précédent

Ces conditions aux limites se comprennent assez bien en considérant que le fluide "accroche" à la paroi par effet visqueux.

Remarque : dans le cas d'un fluide compressible, la force volumique de viscosité s'écrit :

$$\vec{f_v} = \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right) \overrightarrow{grad}(div(\vec{v}))$$

avec ζ le 2^{eme} coefficient de viscosité, il peut s'interpréter comme un coefficient de friction dû à la déformation de la particule fluide au cours de son mouvement, ce qui équivaut à des frottements internes dans le cas d'un fluide compressible.

1.3 Analyse de l'équation de Navier-Stokes

En mécanique des fluides on définit régulièrement des coefficients adimensionnés permettant de comparer différents termes intervenant dans l'équation du mouvement d'un fluide. C'est le cas notamment du nombre de Reynolds, noté Re, qui permet de comparer les termes d'efforts visqueux et d'accélération convective de l'équation de Navier-Stokes. On a :

$$Re = \frac{\|\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}$$

Si on note V la valeur typique de $\|\vec{v}\|$, L l'échelle caractéristique de variation de la vitesse du fluide, on a alors :

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

$\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide, elle s'exprime en $m^2.s^{-1}$.

Dans le cas $Re \gg 1$, le terme visqueux sera alors négligeable devant le terme de convection et dans le cas $Re \ll 1$, on négligera la convection devant les effets de viscosité.

On peut retenir les ordres de grandeurs de ν suivants :

	viscosité cinématique ν ($m^2.s^{-1}$)
air	$\nu_{air} = 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
eau	$\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$
glycérine	$\nu_{gly} = 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$
miel	$\nu_{miel} = 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$

Remarque :
On notera notamment l'inversion de l'ordre relatif entre les coefficients de viscosité cinématiques de l'air et de l'eau par rapport aux coefficients de viscosité dynamique. Cela vient des effets inertiels beaucoup plus importants pour l'eau que pour l'air.

Considérons un écoulement dont on peut négliger le terme convectif, i.e. tel que $Re \ll 1$, ainsi que les actions autres que celles de viscosité. De l'équation de Navier-Stokes il reste :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$$

On reconnaît alors une équation de diffusion, de coefficient de diffusion ν.
A la viscosité du fluide est alors associé un phénomène de transport de quantité de mouvement par diffusion ce qui correspond bien avec les observations de mise en mouvement de proche en proche d'un fluide visqueux.

Remarque :
En considérant les effets visqueux comme des effets de diffusion de quantité de mouvement on peut également écrire :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

où $\tau_{diff} = L^2/\nu$ est le temps caractéristique de diffusion et $\tau_{conv} = L/V$ le temps caractéristique de convection.

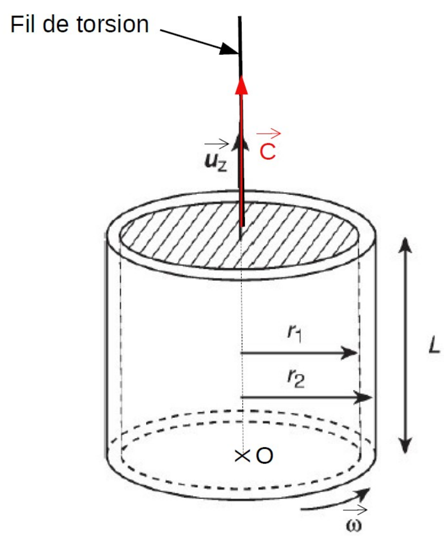
On notera qu'on retrouve bien le fait que le phénomène qui met le plus de temps à s'établir sera le phénomène que l'on pourra négliger dans l'équation de Navier-Stokes.

On peut s'intéresser à quelques ordres de grandeurs du nombre de Reynolds sur des exemples du quotidien :

- voiture sur l'autoroute :
  $L \approx 3\ m$, $V \approx 30\ m.s^{-1}$, $\nu = \nu_{air} \approx 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
  $\Rightarrow$Re $\approx 10^7 \gg 1$, viscosité négligeable
- grain dans un bassin de sédimentation :
  $H = 1\ m$, $\tau \approx 1$ jour, $V = H/\tau \approx 10^{-5}\ m.s^{-1}$,
  $r \approx 1\ \mu m$, $\nu = \nu_{eau} \approx 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$
  $\Rightarrow$Re $\approx 10^{-5} \ll 1$, viscosité domine

2 Mesure de viscosité : le viscosimètre de Couette

lien vers une vidéo illustrant la mise en mouvement du fluide dans un écoulement type Couette cylindrique : https ://youtu.be/k7ZZtxdtmeQ



<u>système</u> : - fluide incompressible, masse volumique ρ, viscosité η
- entre deux cylindres d'axes (Oz), de rayons r_1 et r_2
- cylindre 2 en rotation de vecteur $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$
- cylindre 1 immobile en régime stationnaire, fait un angle α_{eq} par rapport à sa position initiale

On se place en coordonnées cylindrique
- invariance du système par rotation d'angle θ d'axe (Oz).
- $L \gg r_1, r_2 \Rightarrow$ invariance par translation selon (Oz)
$\Rightarrow p = p(r)$, $\vec{v} = \vec{v}(r)$

- fluide incompressible : $div(\vec{v}) = 0$ i.e. :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Or $\vec{v} = \vec{v}(r)$ d'où $\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$ i.e. $rv_r(r) = cste$.
Or par condition d'imperméabilité en $r = r_1$: $v_r(r_1) = 0$, d'où $\forall r$, $rv_r(r) = r_1 v_r(r_1) = 0$ i.e. $v_r(r) = 0\ \forall r$.

Les forces de pression étant normales à la surface du cylindre intérieur, elle ne peuvent pas être à l'origine de l'angle de torsion observé à l'équilibre. cela s'explique donc par la viscosité.
En régime permanent l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$$

On projette cette équation selon la direction $\vec{e}_\theta$:

$$\left(\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_\theta(r) = \eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

Or $\vec{v} = \vec{v}(r)$, d'où :

$$0 = \eta\left(\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

i.e.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

On en déduit que : $v_\theta = \frac{\alpha(r)}{r}$. Et par méthode de variation de la constante, on a :

$$v_\theta(r) = \frac{Qr}{2} + \frac{K}{r}$$

avec K, Q deux constantes.
On utilise alors les conditions aux limites :

- Condition d'adhérence en $r = r_1$:
$v_\theta(r_1) = 0 \Rightarrow K = -\frac{Qr_1^2}{2}$
- Condition d'adhérence en $r = r_2$:
$v_\theta(r_2) = \omega r_2 \Rightarrow \frac{Q}{2}\left(r_2 - \frac{r_1^2}{r_2}\right) = \omega r_2$ i.e. $Q = \frac{2\omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$
D'où :

$$v_\theta(r) = \frac{\omega r_2^2}{r}\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

On s'intéresse à la force tangentielle exercée par le fluide sur le cylindre interne 1. On suppose que toutes les forces selon $\vec{e}_z$ sont compensée par la tension du fil.
On a :

$$d\vec{F}_{fluide\rightarrow 1} = \eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=r_1} dS\vec{e}_\theta$$

d'où
$$d\vec{F}_{fluide\to 1} = \frac{2\eta\omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} dS\vec{e}_\theta$$
D'où le moment exercé par cette force par rapport à l'axe (Oz) :
$$d\Gamma = r_1 dF_{fluide\to 1} = \frac{2\eta\omega r_2^2 r_1}{r_2^2 - r_1^2} dS$$
On obtient alors le couple exercé par le fluide sur le cylindre en intégrant sur l'ensemble de la surface du cylindre 1 :
$$\Gamma = \frac{4\pi\eta\omega L r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$
On applique le théorème du moment dynamique au cylindre 1, sur l'axe (Oz), en régime permanent :
$$0 = \Gamma - C\alpha_{eq}$$
D'où
$$\eta = \frac{C(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\omega L r_2^2 r_1^2} \alpha_{eq}$$
On peut alors en déduire la valeur de η à partir de la mesure de α_{eq}.

(Remarque personnelle, pour mener les calculs on a négligé les effets de bords ce qui semble être une hypothèse assez forte, je pense que pour une leçon on peut présenter cet exemple mais en insistant sur le fait que ça donne une idée de comment remonter à la valeur de η sans en donner l'expression exacte, donc le modèle est à améliorer pour réaliser un viscosimètre.)

3 Ouverture, prolongement et conclusion

Au cours de cette leçon nous avons donc introduit la notion de viscosité qui est fondamentale pour l'explication de phénomènes aux interfaces. On aura notamment vu que la notion de viscosité est fortement liée à la diffusion de quantité de mouvement. Les effets visqueux sont également à l'origine des forces de traînée, forces de frottements visqueux et sont la cause de dissipations d'énergie.
Néanmoins il est important de noter ici qu'on s'est restreint aux fluides newtoniens qui représentent seulement une faible partie des fluides observés. Des modèles plus compliqués sont donc à envisager pour caractériser ces fluides.

Expériences réalisées et animation

- manip des burettes décrite en intro pour illustrer la notion de viscosité à travers l'idée de frottements
- https ://youtu.be/k7ZZtxdtmeQ : vidéo illustrant le principe d'un écoulement de Couette cylindrique, montre aussi comment faire pour avoir un écoulement réversible.

- Autre idée de manip pour l'intro : on rempli une cuve d'un mélange eau glycérol suffisament visqueux, on introduit d'un côté de la cuve un trait de colorant et on met doucement en mouvement le fluide à partir de la surface, par entraînement visqueux on doit voir une ligne inclinée se dessiner dans le fluide.
Il y a le matériel disponible pour cette manip à l'ENS.

Choix pédagogiques

J'ai placé cette leçon comme première approche de la notion de viscosité en mécanique des fluides. J'ai supposé que le modèle, plus simple, du fluide parfait était connu, et à travers cette leçon on vient alors améliorer le modèle en ajoutant une difficulté. La manip en intro avec les burettes, et la façon de définir la notion de viscosité ainsi que la force volumique de viscosité répondent à une même démarche qui est d'essayer de partir du côté intuitif de la notion de viscosité vue comme une sorte de frottements puis de complexifier pour aboutir à l'équation de Navier-Stokes. J'ai essayer de faire des remarques qualitatives quand c'était possible, et j'ai donné quelques ordres de grandeur pour rattacher les notions définies à des concepts concrets et du quotidien ce qui permet de mieux "visualiser" les choses. Enfin j'ai trouvé que l'exemple choisi est intéressant car quitte à traiter d'un écoulement visqueux, autant en traiter un qui fait appel à la diffusion de quantité de mouvement et qui illustre le type de raisonnements qui permettent de remonter à des valeurs de viscosité qui est la grandeur centrale de cette leçon.

Questions

- Quest-ce que le paradoxe de d'Alembert ?
- Taille typique de l'écoulement à prendre en compte pour évaluer le nombre de Reynolds dans ce cas ?
- A quelle condition sur la couche limite l'approximation du fluide parfait est-elle valable ?
- Différence fluide/écoulement incompressible ?
- Exemples de fluides newtoniens / non newtoniens ?
- Pour un fluide parfait, qu'est ce qu'il se passe pour η ?
- Exemple d'autres lois de diffusion ?
- Définir la longueur typique de diffusion ici ?
- Evaluer le temps nécessaire pour atteindre le régime permanent dans le cas de l'écoulement de Couette cylindrique ?
- Différence régime stationnaire / permanent ? permanent = après régime transitoire, stationnaire = indépendant du temps
- Influence de la viscosité sur la propagation du son ?
- Comment on obtient l'équation d'Euler ?
- Pourquoi utilise-t-on la notion de particule fluide ?
- Equation de Navier-Stokes en référentiel non galiléen ?
- Pourquoi on a besoin de l'incompressibilité pour l'équation de Navier-Stokes ?
- Comment on démontre l'expression de la force volumique de viscosité en 3 dimensions ?
- Profil de vitesse dans un tuyau ?

- Définir régimes laminaire et turbulent ? Pourquoi il existe des turbulences à grand Re ? décollement de la couche limite
- Différence Couette et Poiseuille ?
- Ici l'action de contact tangentiel dépend de dS, pourquoi ce n'est pas le cas pour les frottements solides ? En fait la norme de la réaction normale de contact contient la surface réelle de contact et non pas la surface de contact apparente, par exemple pour des masses de même dimensions mais de masses différentes la surface de contact apparente est la même mais la surface de contact réelle est différentes à cause des déformations au niveau microscopique dûes au poids, qu'on retrouve dans la norme de la réaction normale.

Remarques

- Il faut revenir sur la manip d'intro dans la suite de la leçon
- Le plus gros problème de ma leçon est que l'action tangentielle sort un peu du chapeau, il faudrait introduire l'idée de frottements tangentiels dès la manip
- l'écoulement de Couette plan peut être fait en manip d'intro, elle montre aussi l'existence d'une action tangentielle
- Eviter de mentionner la seconde viscosité pour ne pas avoir la question de la démonstration
- Quand on calcule un profil de vitesse il faut le tracer
- Pourquoi pas conclure sur les fluides non newtoniens mais il faut être capable de répondre aux questions après
- Il faudrait peut être séparer les parties forces volumiques et Navier-Stokes pour éviter d'avoir une trop grosse première partie
- Peut être mettre la diffusion avant Navier-Stokes

Bibliographie

Je me suis essentiellement servi de mes cours de prépa pour faire cette leçon. Cependant des références sont régulièrement décrites comme incontournables dans les compte rendus des années précédentes comme :

- Hydrodynamique physique (Guyon Hulin Petit) (c'est la bible de la méca flux apparemment)
- S. Olivier, Physique PSI-PSI*, ou PC-PC*, Tec et Doc