

LP 7 : Dynamique Relativiste

Thomas WOJTKOWSKI - Géraud DUPUY

20 Novembre 2020

Niveau : L3

Pré-requis :

- Postulats de la relativité restreinte
- Transformation de Lorentz
- Quadrivecteurs, Espace à 4D
- Temps propre

Table des matières

1	Introduction	2
2	Principes de la dynamique relativiste	2
2.1	Quadrivecteurs vitesse - impulsion	2
2.2	Energie relativiste	3
2.3	Loi de conservation	4
2.4	Equations du mouvement relativistes	4
3	Collisions	5
3.1	Désintégration	6
3.2	Effet Compton	6
4	Particules relativistes soumises à des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$	8
4.1	Particule accélérée par une différence de potentiel constante .	8
4.2	Particule dans un champs magnétique	9
5	Conclusion	11

6	Questions - Remarques	11
7	Bibliographie	13

1 Introduction

Les lois de la dynamique Newtonienne (le Principe Fondamental de la Dynamique et le Théorème de l'Energie Cinétique) ne sont applicables uniquement à des systèmes ayant des vitesses très inférieures à celle de la lumière.

L'objectif de cette leçon sera d'établir les lois de la dynamique relativistes applicables à des particules relativistes, et qui devront être invariantes par transformation de Lorentz et permettre également de retrouver les lois classiques aux faibles vitesses.

2 Principes de la dynamique relativiste

2.1 Quadrivecteurs vitesse - impulsion

On considère une particule relativiste de masse propre m_0 . On note son quadrivecteur position $\tilde{X} = (ct, \vec{r})$, et sa vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ dans le référentiel du laboratoire.

On définit alors son quadrivecteur vitesse $\tilde{U}$ comme :

$$\boxed{\tilde{U} = \frac{d\tilde{X}}{d\tau}} \quad (1)$$

où $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

En dérivant, on montre :

$$\boxed{\tilde{U} = (\gamma c, \gamma \vec{v})} \quad (2)$$

On définit ensuite le quadrivecteur impulsion associée à la particule de manière analogue avec la mécanique classique :

$$\boxed{\tilde{P} = m_0 \tilde{U} = m_0 (\gamma c, \gamma \vec{v})} \quad (3)$$

Il est utile de savoir pour la suite que : $\tilde{P}^2 = (m_0\gamma c)^2 - (m_0\gamma\vec{v})^2 = (m_0c)^2$

2.2 Energie relativiste

On s'intéresse à la composante spatiale du quadrivecteur impulsion : $m_0\gamma\vec{v}$.

Pour $|\vec{v}| \ll c$, $m_0\gamma\vec{v} \approx m_0\vec{v} = p_{classique}$

On généralise en définissant la quantité de mouvement relativiste :

$$\boxed{\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}} \quad (4)$$

De même pour la composante temporelle de $\tilde{P}$:

Pour $|\vec{v}| \ll c$, $m_0\gamma c \approx m_0c(1 + \frac{v^2}{2c^2}) = \frac{1}{c}(m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2})$

Donc $m_0\gamma c \approx \frac{1}{c}(E_{masse} + E_{cin. classique})$

On généralise à nouveau en définissant l'énergie relativiste comme :

$$\boxed{E = m_0\gamma c^2} \quad (5)$$

On peut poser également que : $E = m_0c^2 + E_c$, où m_0c^2 est appelée énergie de masse de la particule, c'est à dire l'énergie que lui confère sa masse (du fait du principe d'équivalence Masse - Energie introduit par A. Einstein), et E_c est l'énergie cinétique relativiste de la particule.

On a alors :

$$\boxed{E_c = m_0(\gamma - 1)c^2} \quad (6)$$

On peut alors réécrire $\tilde{P}$:

$$\boxed{\tilde{P} = (\frac{E}{c}, \vec{p})} \quad (7)$$

On a alors : $\tilde{P}^2 = (\frac{E}{c})^2 - \vec{p}^2 = (m_0c)^2$

Et donc :

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (8)$$

Remarque (utile ensuite pour l'effet Compton) :

Pour le photon $m_0 = 0$ et $\gamma \rightarrow \infty$, donc (4) et (5) ne sont pas utilisables.

En partant de (8), on a $E = pc = \frac{hc}{\lambda}$, d'où :

$$\boxed{P_{\text{photon}} = \left(\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda} \vec{u} \right)} \quad (9)$$

avec λ la longueur d'onde du photon et $\vec{u} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$
On a donc défini toutes les grandeurs dynamiques relativistes.

2.3 Loi de conservation

Dans le cas de collisions du type : $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, i.e deux particules 1 et 2 donnent deux particules 3 et 4, on utilisera la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \\ E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \end{cases} \iff \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 = \tilde{P}_3 + \tilde{P}_4 \quad (10)$$

2.4 Equations du mouvement relativistes

On définit, par analogie avec la mécanique classique, le quadrivecteur force :

$$\boxed{\tilde{F} = \frac{d\tilde{P}}{d\tau}} \quad (11)$$

En partant de $\tilde{P} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$, on a : $\tilde{F} = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$.

Cherchons à exprimer autrement $\frac{dE}{dt}$ et $\frac{d\vec{p}}{dt}$:

Si $|\vec{v}| \ll c$, $\frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{dp_{\text{classique}}}{dt} = \vec{F}$, où $\vec{F}$ est la force Newtonienne classique (la force de Lorentz essentiellement).

On généralise ce résultat :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \quad (12)$$

De plus, $\tilde{P}^2 = (m_0 c)^2$, donc en dérivant par rapport à τ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{P} \cdot \frac{d\tilde{P}}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{P} \cdot \vec{F} &= 0 \\ \Rightarrow m_0 \gamma(c, \vec{v}) \cdot \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne, avec $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}} \quad (13)$$

Finalement,

$$\boxed{\tilde{F} = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{F} \right)} \quad (14)$$

Les équations de la dynamique relativiste sont donc :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \iff \tilde{F} = \frac{d\tilde{P}}{d\tau}} \quad (15)$$

On obtient donc un principe fondamental de la dynamique relativiste, et un théorème de l'énergie cinétique relativiste.

L'intérêt d'une équation quadrivectorielle est de pouvoir passer d'un référentiel galiléen à un autre par transformation de Lorentz et de laisser ces lois invariantes.

Transition : On va maintenant voir des applications de ces lois pour des particules relativistes.

3 Collisions

Dans cette partie, on va s'intéresser à des exemples de collisions entre particules relativistes. On va utiliser les lois de conservation (10).

3.1 Désintégration

Prenons l'exemple d'une désintégration d'un pion π^+ au repos donnant un muon μ^+ et un neutrino ν_μ : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

Sachant que $m_\pi c^2 = 139,6$ MeV, $m_\mu c^2 = 105,7$ MeV et $m_\nu c^2 \approx 0$, cherchons à déterminer les énergies cinétiques du muon et du neutrino $E_{c,\mu}$ et $E_{c,\nu}$:

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \tilde{P}_\pi &= \tilde{P}_\mu + \tilde{P}_\nu \\ \Rightarrow \tilde{P}_\nu^2 &= (\tilde{P}_\pi - \tilde{P}_\mu)^2 \\ \Rightarrow 0 &= \tilde{P}_\pi^2 + \tilde{P}_\mu^2 - 2\tilde{P}_\pi \cdot \tilde{P}_\mu \end{aligned}$$

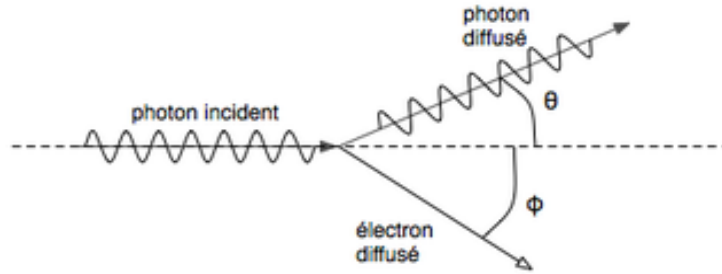
Avec $\tilde{P}_\pi = (m_\pi c, \vec{0})$ (le pion se désintégrant au repos), et $\tilde{P}_\mu = (\frac{m_\mu c^2 + E_{c,\mu}}{c}, \vec{p}_\mu)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (m_\pi c)^2 + (m_\mu c)^2 - 2m_\pi c(m_\mu c + \frac{E_{c,\mu}}{c}) \\ \Rightarrow E_{c,\mu} &= \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2}{2m_\pi c^2} = 4,1 \text{ MeV} \end{aligned}$$

De plus, on a conservation de l'énergie donc :

$$\begin{aligned} E_\pi &= E_\mu + E_\nu \\ \Rightarrow E_\nu &= E_{c,\nu} = E_\pi - E_\mu \\ \Rightarrow E_{c,\nu} &= m_\pi c^2 - (m_\mu c^2 + E_{c,\mu}) = 29,8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

3.2 Effet Compton



Diffusion Compton: Collision d'un photon avec un électron au repos

L'effet Compton correspond à la diffusion d'un photon sur un électron libre au repos, provoquant l'augmentation de la longueur d'onde du photon incident. On peut calculer cette variation de la longueur d'onde entre le photon diffusé γ' et le photon incident γ :

On a :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\gamma + \tilde{P}_e &= \tilde{P}_{\gamma'} + \tilde{P}_{e'} \\ \Rightarrow \tilde{P}_{e'}^2 &= (\tilde{P}_e + (\tilde{P}_\gamma - \tilde{P}_{\gamma'}))^2 \\ \Rightarrow \tilde{P}_{e'}^2 &= \tilde{P}_e^2 + (\tilde{P}_\gamma - \tilde{P}_{\gamma'})^2 + 2\tilde{P}_e \cdot (\tilde{P}_\gamma - \tilde{P}_{\gamma'})\end{aligned}$$

Avec $\tilde{P}_{e'}^2 = \tilde{P}_e^2 = (m_e c)^2$ et $\tilde{P}_{\gamma'}^2 = \tilde{P}_\gamma^2 = 0$, en développant le calcul :

$$\Rightarrow \tilde{P}_\gamma \cdot \tilde{P}_{\gamma'} = \tilde{P}_e \cdot (\tilde{P}_\gamma - \tilde{P}_{\gamma'})$$

Puis comme $\tilde{P}_e = (m_e c, \vec{0})$, $\tilde{P}_\gamma = (\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda} \vec{u}_\gamma)$ et $\tilde{P}_{\gamma'} = (\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'} \vec{u}_{\gamma'})$, sachant que $\vec{u}_\gamma \cdot \vec{u}_{\gamma'} = \cos(\theta)$ (θ est l'angle de diffusion du photon), on obtient en continuant le calcul :

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta))} \quad (16)$$

où on appelle $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ la longueur de Compton : pour l'électron, $\lambda_c = 2,4$ pm.

La longueur d'onde du photon diffusé est donc augmentée. Cela peut s'interpréter par le fait que le photon cède de l'énergie à l'électron (si ce dernier est faiblement lié à l'atome, ce qui lui permettra d'être mis en mouvement) : or l'énergie d'un photon est inversement proportionnelle à sa longueur d'onde, d'où ce résultat.

Cette variation de longueur d'onde entre le photon incident et le photon diffusé a été vérifié expérimentalement par Compton, et lui a valu le prix Nobel en 1927.

Cette expérience met en valeur à la fois le caractère relativiste du photon en tant que particule se déplaçant à la vitesse c , mais également son caractère

ondulatoire, puisqu'on peut lui associer une longueur d'onde.

4 Particules relativistes soumises à des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

On va s'intéresser maintenant au mouvement de particules relativistes soumises à des champs électromagnétiques, et nous verrons la différence avec des particules classiques. De plus, cela pourra nous permettre de comprendre le fonctionnement des accélérateurs de particules.

4.1 Particule accélérée par une différence de potentiel constante

On considère ici une particule de masse propre m_0 et de charge q , initialement au repos, et soumise à une différence de potentiel U constante.

En mécanique classique, en écrivant le théorème de l'énergie cinétique, à savoir $\Delta E_c = qU$, on obtient $v^2 = \frac{2qU}{m_0}$, où v est la vitesse acquise par la particule. Ce résultat n'est cependant valable que pour $v \ll c$.

En dynamique relativiste, on a vu que l'on peut également écrire $\Delta E_c = qU$, mais ici $\Delta E_c = m_0(\gamma - 1)c^2$, et non $\frac{m_0 v^2}{2}$.

On a donc :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qU}{m_0 c^2} + 1$$

ce qui donne :

$$\boxed{v^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{qU}{m_0 c^2} \right)^2} \right)} \quad (17)$$

Ce résultat montre que si U augmente, v tend vers la vitesse de la lumière c , mais sans dépasser cette dernière. De plus, pour $U \ll \frac{m_0 c^2}{q}$, on retrouve le résultat classique.

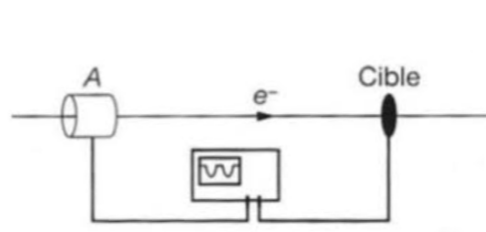
En ordre de grandeur, dans les accélérateurs, les particules sont accélérées avec des différence de potentiel de l'ordre du MV, ce qui donne pour l'électron par exemple $v \approx 0,94c$.

Cette vitesse limite pour les particules accélérées a été mise en évidence par Bertozzi en 1964.

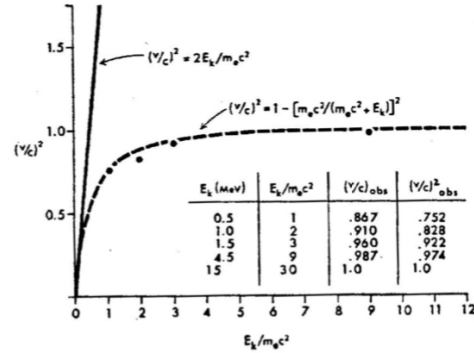
Dans son expérience, les électrons sont d'abord accélérés par une tension variant entre 0,5 et 15 MV dans un accélérateur. Un anneau est placé à la sortie de l'accélérateur et permet de détecter le passage des électrons via un oscilloscope. Les électrons atteignent ensuite une cible en aluminium, et leur arrivée sur cette dernière est également détectée à l'oscilloscope.

Connaissant la distance entre l'anneau et la cible et l'intervalle de temps correspondant au passage des électrons grâce à l'oscilloscope, Bertozzi en a déduit la vitesse des électrons en fonction de la tension accélératrice.

Il constate que la vitesse des électrons ne dépasse jamais c , et que ses points expérimentaux suivent la courbe donnée par l'équation (17) (Fig. 1).



(a) Dispositif expérimental simplifié utilisé par Bertozzi



(b) Résultats de l'expérience

FIGURE 1

4.2 Particule dans un champs magnétique

On considère la même particule, soumise cette fois-ci à un champ magnétique $\vec{B}$ que l'on suppose uniforme et constant (pour ne pas avoir à considérer de champ électrique induit).

En utilisant les équations de la dynamique relativiste, on a :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \frac{dE}{dt} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Ainsi, $E = m_0\gamma c^2$, et donc γ , sont constants. Sachant que $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}} \quad (19)$$

Les calculs sont alors exactement les mêmes qu'en mécanique classique, mais le résultat sera différent.

Par exemple, si la vitesse initiale $\vec{v}(t=0)$ est orthogonale au champ $\vec{B}$, la trajectoire sera circulaire dans le plan orthogonal à $\vec{B}$, et la norme du vecteur $\vec{v}$ sera constante.

Le rayon de la trajectoire sera $R = \frac{\gamma m_0 v}{qB}$, et la pulsation sera $\omega = \frac{qB}{\gamma m_0}$.

Ce que l'on constate est que la pulsation dépend de γ et donc de la vitesse de la particule. Cela n'était pas le cas pour le cyclotron, pour lequel $\omega_c = \frac{qB}{m_0}$. De plus, le rayon dépend également de la vitesse, comme pour le cyclotron où $R_c = \frac{m_0 v}{qB}$.

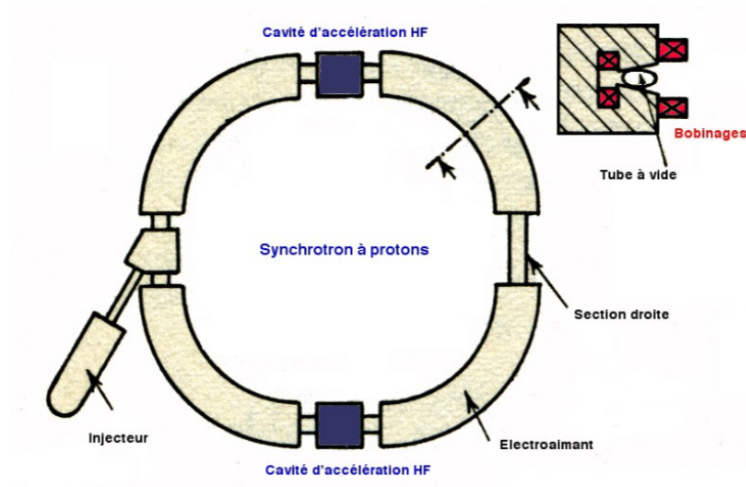
Cependant, c'est le synchrotron, et non le cyclotron, qui est utilisé dans les accélérateurs de particules pour faire acquérir de l'énergie aux particules avant de les collisionner.

Dans un synchrotron, les particules sont accélérées après leur passage dans des cavités accélératrices par le biais d'une différence de potentiel, avant d'être soumises à un champ magnétique pour leur donner une trajectoire circulaire de rayon constant.

Pour maintenir le rayon de cette trajectoire constant, le champ magnétique doit être ajusté, puisqu'en effet, nous venons de voir que le rayon augmente quand la vitesse de la particule augmente.

Cela permet de maintenir la particule à un rayon constant dans le synchrotron, contrairement au cyclotron où le rayon augmente après chaque accélération.

L'énergie acquise par la particule dans un synchrotron peut actuellement atteindre le TeV, alors que dans un cyclotron, elle ne dépasse pas la centaine de MeV.



5 Conclusion

Nous avons donc décrit les principes de la dynamique relativiste, et notamment les lois de conservation lors des collisions de particules.

En physique des particules, il existe également d'autres lois de conservation liées aux nombres quantiques intrinsèques aux particules. Cela permet notamment la prédiction de nouvelles particules, avant leur éventuelle détection dans les accélérateurs.

6 Questions - Remarques

Questions :

- Pourquoi, dans les collisionneurs, les collisions se font en accélérant deux faisceaux l'un vers l'autre, plutôt qu'en envoyant un faisceau sur une cible fixe ?

Cela permet de disposer d'une énergie finale beaucoup plus élevée dans le référentiel du centre de masse, et donc d'étudier des processus de très hautes

énergies.

- Peut on produire des particules avec des collisions en mécanique classique ? Non

- Sur les particules : Quelle est la différence entre particules élémentaires et composites ? Qu'est ce qu'un lepton, un quark, un hadron, un méson, un baryon ? Qu'est ce qu'une anti-particule ?

- Quelle est la différence entre un cyclotron et un synchrotron ? Pour le cyclotron, la pulsation de la trajectoire est indépendante de la vitesse de la particule, contrairement au synchrotron

- Pourquoi dérive-t-on par rapport à τ pour définir $\tilde{U}$, $\tilde{P}$? Car τ est un invariant relativiste intrinsèque à la particule (contrairement à t qui dépend du référentiel dans lequel on se place)

Remarques :

- Il faut plus de liant entre les parties ; notamment lors de la première partie où beaucoup de définitions s'enchaînent, il faut annoncer à quoi serviront certaines d'entre elles dans les parties 2 et 3 (ex : l'expression de $\tilde{P}^2$, de l'énergie cinétique...)

- Il faut détailler un peu plus les petits calculs au début, comme la dérivation de $\tilde{X}$ pour obtenir $\tilde{U}$, le calcul de $\tilde{P}^2$ et aussi le fait que $\tilde{P} \cdot \tilde{F} = 0$ implique $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

- Il faut insister aussi sur le concept d'énergie de masse, c'est à dire sur le fait qu'une particule au repos dispose d'une énergie de part sa masse, car c'est une nouveauté essentielle introduite par la relativité restreinte.

- Pour l'effet Compton, seul le résultat est intéressant, donc il faudrait peut être mettre le calcul sur slide, et parler également d'un exemple de physique des particules plus moderne.

- Le plan pourrait être changé : on garde la même première partie sans les lois de conservations ; en seconde partie, le mouvement dans un champ

électromagnétique, avant d'ouvrir vers le synchrotron et l'intérêt des collisions avec 2 faisceaux ; enfin en troisième partie, on parle des collisions et des lois de conservation, avec un exemple de physique moderne et l'effet Compton sur slide.

Ça permettrait un peu plus de lien entre les parties 2 et 3.

7 Bibliographie

- *Mécanique 1*, BFR
- *Introduction à la relativité*, D. Langlois
- *Relativité, Fondements et application*, J-P Pérez
- *Relativité restreinte*, C. Grossetête
- *Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons*, W. Bertozzi
- *Animation pour l'effet Compton* : http://phys23p.sl.psu.edu/phys_anim/mod/embederQ5.1102.html