LP03 - Caractère non-galiléen du référentiel terrestre

Joseph Delpy
Prépa Agreg ENS Paris-Saclay
Correcteur : François Soubiran

Fevrier 2021

Niveau : CPGE/L2
Prérequis :

- Référentiels galiléens et non-galiléens, référentiels usuels en mécanique
- Théorèmes fondamentaux de la dynamique
- Dynamique en référentiel non-galiléen, forces d'inertie
- Force de gravitation, force de marée.

Table des matières

1 Introduction

En 1832, Ferdinand Reich réalise l'expérience suivante dans une mine de Saxe : il lâche un objet du haut d'un puits de 158 mètres. Au sol, il remarque que statistiquement, les impacts sont décalés de 28,3 mm par rapport à la verticale locale du point de lâcher de l'objet : il met en évidence ce que l'on appelle depuis plusieurs siècles déjà la **déviation vers l'est**. Sur slide : schéma de l'expérience de reich.

Ce phénomène avait déjà été observé et étudié auparavant, notamment par Newton, qui explique cet effet de manière sommaire par la rotation de la Terre sur elle-même. Il faudra attendre les travaux de Gaspard-Gustave Coriolis pour expliquer de manière convaincante cet effet, grâce à l'introduction de l'accélération de Coriolis, qui découle directement du caractère non-galiléen du référentiel terrestre, que nous étudierons dans cette leçon.

Si vous vous demandez pourquoi est-ce qu'on s'intéresse à cet effet qui paraît en première approximation négligeable, Edwin Hall s'est posé la question et a conclu que ce problème avait **"la dignité d'un âge vénérable et le charme du mystère !"**

2 Mouvement de la Terre et conséquences

2.1 Différents référentiels à considérer

Première question : **Quel référentiel galiléen pratique utiliser pour décrire le mouvement des objets terrestres ?** En effet, on a vu dans le cours de mécanique que l'introduction des forces d'inertie présuppose que l'on ait préalablement choisi un référentiel galiléen de référence pour l'étude du problème.

Sur slide : résumé des différentes référentiels usuels : référentiel de Copernic (origine au centre de masse du système solaire, axes pointant vers 3 étoiles lointaines), géocentrique, terrestre.

Dans cette leçon, on va supposer que le référentiel de Copernic est galiléen, sans plus de discussion, en admettant que cette approximation est valable sur des échelles de temps de l'ordre de 250 millions d'années. Cependant, on remarque qu'il n'est pas pratique pour décrire le mouvement d'objets à la surface de la Terre, notamment à cause du mouvement de la Terre elle-même (dictée par les lois de Kepler).

Les axes du référentiel géocentrique pointant vers les mêmes étoiles lointaines que le référentiel de Copernic, par définition, le référentiel est en translation elliptique non uniforme par rapport au référentiel de Copernic. A priori, il n'y a pas de raison que l'on puisse le considérer galiléen. Pourtant, il est un bon candidat pour la description du mouvement des objets au voisinage de la Terre. Nous allons étudier plus en détail ce référentiel.

2.2 Dynamique dans le référentiel géocentrique

Sur slide : calcul des forces de marées agissant sur un objet à la surface la terre, soumis aux attractions gravitationelles de la Lune et du Soleil, en appliquant le PFD dans le référentiel géocentrique non-galiléen. Prendre en compte les forces d'inertie, les simplifier avec la propriété de translation du référentiel géocentrique par rapport à celui de Copernic. Voir calcul sur le diapo associé.

Ordre de grandeur des termes de gravitation différentielle, notant M la position de l'objet au voisinage de la Terre, et T le centre de la Terre :

- Pour le soleil : $|\mathcal{G}_S(M) - \mathcal{G}_S(T)| = 5.10^{-7}$ m.s^{-2}
- Pour la lune : $|\mathcal{G}_L(M) - \mathcal{G}_L(T)| = 10^{-6}$ m.s^{-2}

Bilan : Ces deux accélérations différentielles étant très faibles devant l'accélération moyenne de la pesanteur Terrestre, on va négliger les effets de marées dans cette leçon, et donc supposer le référentiel Géocentrique comme galiléen pour notre étude.

Du coup, notre étude se limite aux effets non-galiléens dus à la simple rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique. On va considérer cette rotation uniforme d'axe passant par les pôles, à la vitesse angulaire $\Omega = 7,29.10^{-5}$ rad.s^{-1}. A partir de là, on peut réécrire le PFD dans le référentiel Terrestre, ce qui était le but de cette partie :

$$m\vec{a}(M/R_T) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}(T/R_G) - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times T\vec{M}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}(M/R_T)$$

Or, $\vec{a}(T/R_G) = 0$ donc :

$$m\vec{a}(M/R_T) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times T\vec{M}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}(M/R_T)$$

Sur slide : paramétrage de la figure 1.
Remarque : Supposer $\vec{\Omega}$ constant revient à négliger la précession des équinoxes (période $\sim$ 26000 ans)

3 Correction du champ au pesanteur terrestre

3.1 Effet de la force d'inertie d'entraînement

On s'intéresse ici à un objet immobile à la surface terrestre : $\vec{v}(M/R_T) = \vec{0}$ et donc $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$
Dans ce cas :

- $T\vec{M} = (R_T \cos\lambda, 0, R_T \sin\lambda)_{X_T,Y_T,Z_T}$

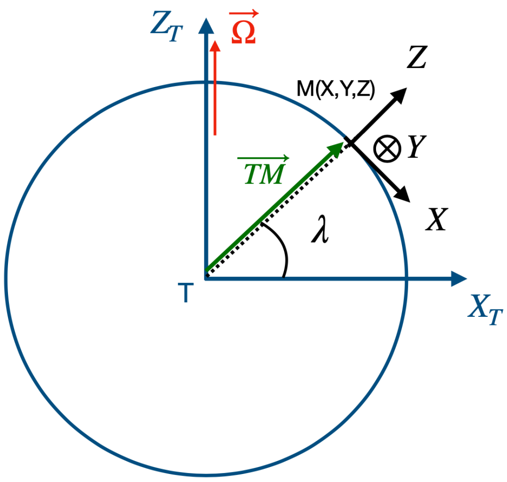

FIGURE 1 – Paramétrage du problème. On exploite ici la symétrie sphérique supposée de la terre, qui permet de ne repérer un objet à la surface de la Terre que grâce à la latitude.

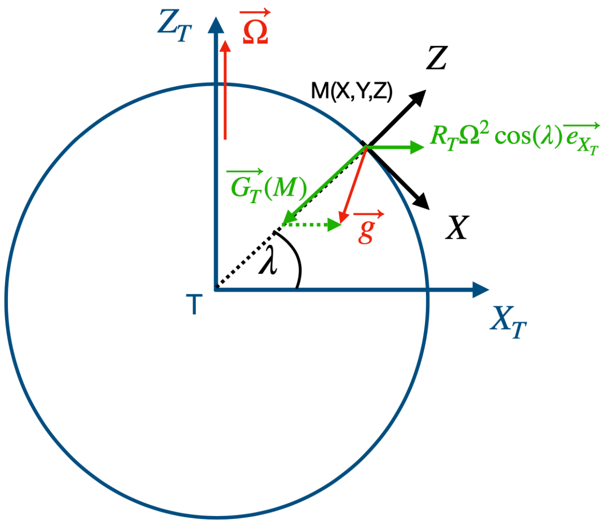

FIGURE 2 – Définition du poids d'un objet : somme de la force d'inertie d'entraînement et de l'attraction gravitationnelle terrestre.

- $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)_{X_T,Y_T,Z_T}$

On calcule : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times T\vec{M}) = m\Omega^2 R_T \cos\lambda \; \vec{e}_{X_T}$. Et donc, on définit le poids comme étant la force subie par un objet placé à la surface de la Terre, et ne subissant comme vraie force que l'attraction gravitationnelle de la Terre :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{a}(M/R_T) = m\vec{g}(\lambda) = m\vec{\mathcal{G}}_T + \Omega^2 R_T \cos\lambda \; e_{\vec{X_T}}}$$

Conséquence : Le poids n'est plus strictement radial, mais admet une composante orthogonale à $\vec{\Omega}$.

La verticale à un lieu, définie par **la direction que prend le fil à plomb**, n'est plus dirigée vers le centre de la Terre

Sur slide : figure 2.

3.2 Variation du champ de pesanteur terrestre

On commente la dépendance de $\vec{g}(\lambda)$ avec la latitude en comparant les deux valeurs extrêmes :

- $\lambda = \pi/2$ (pôle nord) : $\vec{g}(\lambda) = \vec{\mathcal{G}}_T(M)$
- $\lambda = 0$ (équateur) : $\vec{g}(\lambda) = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + R_T \; \Omega^2 \; \vec{e}_{X_T}$

La différence maximale est donc $\Delta g = g(\text{pôle}) - g(\text{équateur}) = R_T\ \Omega^2 = 3,39.10^{-2}$ m.s^{-2} Première observation : la correction relative est très faible (inférieure au %). Deuxième remarque : expérimentalement, cette différence est mesurée à $5,2.10^{-2}$ m.s^{-2}. L'ordre de grandeur est donc le bon, l'écart restant est due simplement à notre hypothèse de sphéricité de la Terre. La mesure de cette écart nous renseigne d'ailleurs sur le paramètre d'ellipticité de la Terre (formule de Clairault).

4 Influence de la force d'inertie de Coriolis

4.1 Propriétés et déviations vers l'Est

On s'intéresse ici au mouvement d'un objet en chute libre depuis une hauteur h au voisinage de la surface de la Terre. On va négliger ici la correction faite sur la direction de la verticale locale.

L'objet étant en chute libre, sa vitesse va être non nulle, de sorte qu'on est obligés de considérer la force de Coriolis ; l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{m\vec{a}(M/R_T) = m\vec{g}(\lambda) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}(M/R_T)}$$

Que l'on va exprimer dans le repère local (X, Y, Z) (voir figure 1). Cette équation est a priori difficile à intégrer, on souhaite mettre en place un traitement perturbatif. Pour ça, on fait l'hypothèse suivante : à tout instant, on suppose $v_Z(M/R_T) \gg v_Y(M/R_T)$, de sorte que l'on va prendre $\vec{v}(M/R_T) \mathbin{/\!/} \vec{e}_Z$ dans l'expression de la force de Coriolis.

On tombe sur le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\Omega\cos\lambda\dot{z} \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

où l'on observe l'apparition d'une accélération due à la force de Coriolis qui est dirigée selon y, c'est à dire selon vers l'est dans notre système de coordonnées, ce qui est l'effet attendu ! Après intégration avec les conditions initiales $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$, $z(0) = R_T + h$:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = g\Omega\cos\lambda\dfrac{t^3}{3} \\ z(t) = R_T + h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Le temps de chute t_c est tel que $z(t_c) = R_T$, c'est à dire :

$$\begin{cases} t_c = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ y_c = \dfrac{\Omega\cos\lambda}{3\sqrt{g}} \times (2h)^{3/2} \end{cases}$$

La quantité y_c étant la fameuse déviation vers l'est. Application numérique : Pour l'expérience de Ferdinand Reich, h=158 m, $\lambda = 50°$, on trouve $y_c = 27.4$ mm, pour 28.4 expérimentalement.

On va maintenant raisonner en ordre de grandeur sur notre problème pour en tirer une observation tout à fait générale. On écrit le rapport des longueurs en jeu :

$$\frac{y_c}{h} = \frac{\Omega\cos\lambda}{3\sqrt{g}} \times 2\sqrt{2h} \propto \Omega\sqrt{h}$$

Or le temps de chute t_c est tel que $t_c \propto \sqrt{h}$ donc finalement :

$$\frac{y_c}{h} \propto \frac{t_c}{T_{rot}}$$

où T_{rot} est la période de rotation de la Terre. On en déduit donc une propriété que l'on trouve souvent sans trop de justification : les effets relatifs de la force de Coriolis sont négligeables dès lors que la durée de l'expérience (ici le temps de chute t_c) sont très faibles devant une journée.

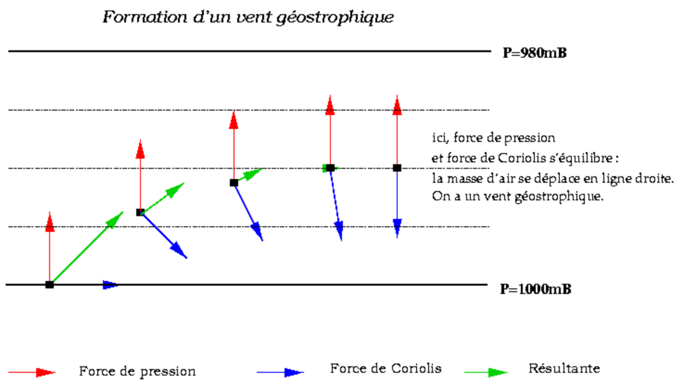

FIGURE 3 – Atteinte d'une régime stationnaire pour la particule fluide, dit "équilibre géostrophique".

4.2 Application : les vents géostrophiques

On s'intéresse ici au mouvement d'une particule fluide évoluant dans l'atmosphère, et pour fixer les idées, dans le plan local tangent à la surface de la Terre, par exemple selon $\vec{e}_X$, c'est-à-dire vers le Sud. Dans ce cas, un calcul similaire au précédent donne $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2m\Omega v \sin\lambda\ \vec{e}_Y$. Le fluide est donc dévié vers l'ouest dans l'hémisphère nord, vers l'est dans l'hémisphère sud. On admet que quelque soit la direction de son mouvement, la masse de fluide est déviée vers sa droite dans l'hémisphère nord, et vers sa gauche dans l'hémisphère sud.

On s'intéresse à une conséquence de cette déviation du mouvement sur la formation de cyclone, dans des zones de l'atmosphère où règnent des gradients horizontaux de pression. Sur slide : formation d'un vent géostrophique, représentation des forces qui s'appliquent sur la masse de fluide, et des différentes étapes de la mise en mouvement. On se place dans l'hémisphère nord. Le fluide (de l'air, un nuage,...) est mis en mouvement par le gradient de pression considéré. Il acquiert une vitesse, et donc est soumis à la force de Coriolis, qui fait tourner la direction dans laquelle il évolue vers la droite constamment. Existe-t-il une position d'équilibre pour le problème ? Oui : lorsque la force du au gradient de pression et la force de Coriolis s'annulent. On peut se convaincre que cela se produit lorsque la masse d'air se déplace dans une direction qui est orthogonale au gradient de pression, c'est-à-dire parallèlement aux isobares (voir figure 3 pour l'explication).

Le fluide, en régime stationnaire, obéit à l'équation :

$$\boxed{\rho\vec{g} - \vec{\nabla}p - 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}}$$

On projette l'équation dans le plan tangent (X,Y), en notant $\vec{\nabla}_{/\!/}p$ la composante tangentielle du gradient de pression, et on obtient la vitesse géostrophique :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{2\rho\Omega}\vec{e}_{Z_T} \times \vec{\nabla}_{/\!/}p}$$

D'où l'on déduit la propriété exposée plus haut : pour les vents géostrophiques, les isobares sont les lignes de champ ! Autre précision : pour des dépressions (cyclones) ou surpressions (anticyclones), le sens de $\vec{\nabla}_{/\!/}p$ est inversé, et donc le sens de rotation des vents est inversé. Sur slide : schéma cyclone / anticyclone. De plus, pour un gradient de pression donné, le sens de rotation est inversé dans l'hémisphère nord et l'hémisphère sud.

5 Conclusion

Récapituler les différents objectifs et réponses de la leçon, et insister sur les conditions pour lesquelles on peut négliger le caractère non-galiléen du référentiel terrestre (les rapports de jury demandent clairement ce bilan là) :

- On peut négliger les forces de marées pour des objets proches de la surface de la Terre : on s'affranchit alors du caractère non-galiléen du référentiel géocentrique ;

- On peut négliger l'accélération d'entraînement sans condition sur la durée de l'expérience car elle est faible devant l'accélération gravitationnelle terrestre pour un objet proche de la surface de la Terre également ;
- Dans le cas où la durée de l'expérience est très courte devant une journée, on peut également négliger les effets relatifs de la force d'inertie de Coriolis.

6 Entretien : questions et commentaires

- **Dans quelle mesure peut-on parler de "forces d'inerties" ?** les accélérations d'inertie sont des accélérations uniquement dues à l'expression d'un certain mouvement dans un certain référentiel. On peut choisir de les modéliser mathématiquement par des forces, mais celles-ci ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction : ce ne sont pas des forces à proprement parler.
- **Comment serait modifiée une résolution énergétique d'un problème posé dans un référentiel non-galiléen ? L'énergie mécanique est-elle conservée ?** La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas, et la force d'inertie d'entraînement dérive d'un potentiel, donc l'énergie mécanique est conservée par ces forces. Dans le référentiel non-galiléen en question, il faut inclure l'énergie potentielle associée à la force centrifuge : $E_p(r) = \dfrac{m\Omega^2 r^2}{2}$ avec r la distance à l'axe de rotation.
- **N'y a-t-il pas un paradoxe à considérer les forces de marées négligeables alors qu'on en observe facilement les conséquences (marées océaniques) ?** Si l'on raisonne sur les ordres de grandeurs de longueur mises en jeu, les amplitudes des marées sont de l'ordre de la dizaine de mètres au maximum, alors que la profondeur moyenne des océans est de 3600 mètres, donc tout à fait négligeable... Mais pas à l'échelle humaine.
- **Qu'est-ce que la précession des équinoxes ?** il s'agit du mouvement de précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique. Du fait de l'ellipticité de la Terre, l'attraction gravitationnelle du soleil crée un moment qui a tendance à ramener le grand axe de la Terre dans le plan de l'écliptique ; or le moment cinétique de la Terre est conservé (voir forces centrales), et donc il y a précession de l'axe de rotation de la Terre (comme un gyroscope).
- **Quelle est la différence entre la déviation vers l'est et les vents géostrophiques du point de vue hémisphère Nord/Sud ?** La déviation vers l'est est respectée dans les deux hémisphères, puisqu'elle ne dépend que du sens de rotation de la Terre quelle que soit la position sur le globe. Mathématiquement, on a fait intervenir la dépendance en la latitude par un $\cos\lambda$, qui est une fonction paire. Pour les vents géostrophiques, le sens dans lequel est dévié la masse de fluide par la force de Coriolis dépend de l'hémisphère. Mathématiquement, on a fait intervenir un $\sin\lambda$, fonction impaire, dans l'expression de la force de Coriolis pour un objet en mouvement dans le plan tangent (X,Y).
- **Quels sont les effets qui auraient pu fausser la mesure de Reich dans le puits de la mine ?** L'expérience ayant lieu dans une mine, on pourrait penser que Reich s'est affranchi des effets de bourrasques de vents. Pourtant, le fond des puits étant à une température bien plus élevée qu'à la surface, on a probablement des mouvements d'airs convectifs. A priori l'étude statistique menée a permis de s'en affranchir.
- **D'ou vient le "250 millions d'années" pour la validité du caractère galiléen du référentiel de Copernic ?** Il s'agit de la période de rotation du système solaire dans la galaxie.
- **Quelle est la différence entre référentiel de Copernic et Héliocentrique ?** Il s'agit de l'origine : pour Copernic, c'est le centre de masse du système solaire. Pour l'Héliocentrique, c'est le centre du Soleil. La différence est très mince, puisque le centre de masse du système solaire est compris au sein du soleil lui-même.
- **Comment obtenir une cartographie détaillée du champ de pesanteur d'un astre, disons la lune ?** On envoie deux sondes, sur des orbites de même altitude, qui se suivent. Lorsque la première sonde rencontre une anomalie gravitationelle, elle est accélérée (ou freinée), tandis que la seconde ne la rencontrera que plus tard. On mesurant les accélérations relatives des deux sondes, on peut faire l'image du champ gravitationnel crée par l'astre.
- **Connaissez-vous des applications dans lesquels les forces d'inertie d'entraînement sont utiles ?** Les centrifugeuses, notamment pour séparer le plasma des globules dans le sang. On peut citer aussi le régulateur de Watt, qui permettait l'asservissement en pression des premières machines à vapeur.
- **La Terre est-elle un solide indéformable ?** Non, on peut utiliser un modèle de fluide à l'équilibre hydrostatique, on peut ainsi remonter à une modélisation de la forme elliptique de la Terre.

- **Pouvez-vous commenter la stabilité des points de Lagrange vis-à-vis des forces d'inertie ?** Seuls les points L4 et L5 sont stables par rapport au système à trois corps Objet-Terre-Soleil. Les autres sont des points cols ou selles donc instables. Pour un objet placé en L4 et L5, les forces d'inertie ont tendance à le ramener vers le point de Lagrange occupé à chaque fois qu'il tend à s'en éloigner. Remarque : du fait de tous les autres corps célestes, les objets placés en ces points n'y restent jamais très longtemps.
- **de quoi sont constitués les gravimètres aujourd'hui ?** De systèmes interférentiels à lasers pour mesurer avec précision des temps de vol d'objets (atomes...) en chute libres.

7 Bibliographie

— BFR, mécanique

— Brasselet, Mécanique

— Perez, Mécanique