

C.1: Modèle semi-quantique de Bohr

Avant de s'intéresser à la structure de l'atome, on avait déterminé que chaque atome (sous le coup d'une excitation) était capable de rayonner une onde électromagnétique (parfois appartenant au spectre visible). Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde caractéristiques de ces rayonnements vérifient la loi expérimentale de Balmer-Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (1)$$

Où n et p sont des entiers ($n < p$) et R_H est la constante de Rydberg. On souhaite retrouver théoriquement ce résultat en s'intéressant à l'atome d'hydrogène.

1) Dans le modèle de Rutherford, il est possible d'envisager une trajectoire circulaire de rayon R de l'électron autour du noyau fixe. Calculer la vitesse v correspondant à cette orbite et en déduire la période T de rotation de l'électron sur cette orbite en fonction de ε_0 , m_e , e et R .

2) Montrer que la force électrique ressentie par l'électron dérive d'une énergie potentielle que l'on explicitera. En déduire l'énergie mécanique E sur l'orbite circulaire de rayon R .

3) On numérote par deux entiers n et p deux orbites circulaires distinctes d'énergies mécaniques respectives E_n et E_p . On note L_n et L_p les moments cinétiques respectifs par rapport au noyau.

Montrer que $E_p - E_n = Y \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right)$ (2) ; Y est une constante que l'on explicitera en fonction de e ,

ε_0 et m_e .

4) En tenant compte de résultats connus en 1913, Bohr a pu poser la relation bien connue aujourd'hui $E_p - E_n = h\nu_{np}$ entre énergie et fréquence. De plus, il a posé la condition de

quantification du moment cinétique suivante pour les orbites circulaires $L_n = n \cdot \hbar$ (où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante réduite de Planck). Montrer que ces deux relations permettent de retrouver l'égalité (1). En déduire une expression de la constante de Rydberg R_H en fonction de ε_0 , m_e , e , c et $\hbar$. Faire l'application numérique.

Modèle semi-quantique de Bohr

1) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron assimilé à un point matériel décrivant une trajectoire circulaire dans le référentiel de l'atome supposé galiléen :

$$m_e \cdot \vec{a} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \vec{u}_r$$

En projetant sur $\vec{u}_r$: $-m_e \cdot \frac{v^2}{R} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2}$

soit $v = \sqrt{\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot R}}$ Avec $v = R \cdot \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} R$; $T = \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^3 \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot R^3}{e^2}}$

A.N. : $v = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T = 1,4 \cdot 10^{-16} \text{ s}$

2) Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ exercée par la proton sur l'électron à pour expression :

$$\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{dr}{r^2} \right) = -dE_{Pe}$$

soit $\frac{dE_{Pe}}{dr} = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$

Par intégration : $E_{Pe} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} + A$. Si on pose que pour $r \rightarrow \infty$; $E_{Pe} = 0$ alors $A = 0$ et $E_{Pe} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$

Pour une trajectoire circulaire de rayon R : $E_{Pe} = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}$

$E_m = E = E_C + E_{Pe}$: énergie mécanique de l'électron dans le référentiel de l'atome. $E = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 - \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}$ Sachant que $v = \sqrt{\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot R}}$: $E = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}$

On retrouve l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire : $E = \frac{E_{Pe}}{2} = -E_C$

3) Soit $E_n = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_n}$ et $E_p = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R_p}$ les énergies mécaniques des trajectoires circulaires de rayons R_n et R_p et L_n et L_p leurs moments cinétiques. Explicitons le moment cinétique L pour une trajectoire circulaire : $L = m_e \cdot R \cdot v = \sqrt{\frac{m_e \cdot e^2 \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}}$ Soit $L_n = \sqrt{\frac{m_e \cdot e^2 \cdot R_n}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}}$ et $L_p = \sqrt{\frac{m_e \cdot e^2 \cdot R_p}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}}$

$$E_p - E_n = \frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_p} \right)$$

$$E_p - E_n = \frac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right) = Y \cdot \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right) \text{ avec } Y = \frac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2}$$

4) $L_n^2 = n^2 \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot \pi} \right)^2$ et $L_p^2 = p^2 \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot \pi} \right)^2$; soit $E_p - E_n = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{h \cdot c}{\lambda_{np}}$

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

On en déduit l'expression de la constante de Rydberg :

$$R_H = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c}$$

A.N. : $R_H = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot (4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9)^2}{8 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$